

Überblick "Lineare Abbildungen und Matrizen"

V \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension n ; $B = \{b_1, \dots, b_n\}$ geordnete Basis von V
 W \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension m ; $E = \{c_1, \dots, c_m\}$ geordnete Basis von W
 $f: V \rightarrow W$ lineare Abbildung

1) Sei $v \in V$. Was sind die Koordinaten von v bzgl. B ? Sind diese Koordinaten eindeutig?

Da B Basis von V , kann man schreiben $v = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot b_j$ mit gewissen $\beta_1, \dots, \beta_n \in \mathbb{R}$. Damit lauten die Koordinaten von v bzgl. B

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Koordinaten sind eindeutig: denn gilt $v = \sum_{j=1}^n \beta'_j \cdot b_j$ für $\beta'_1, \dots, \beta'_n \in \mathbb{R}$ mit $\beta'_j \neq \beta_j$ für mindestens ein $j \in \{1, \dots, n\}$, so folgt

$$v = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^n \beta'_j \cdot b_j \Leftrightarrow \sum_{j=1}^n (\beta_j - \beta'_j) \cdot b_j = 0 \quad \textcircled{*}$$

Da B eine Basis ist, sind b_1, \dots, b_n insbesondere linear unabhängig. Damit folgt aus $\textcircled{*}$ sofort, dass für $j=1, \dots, n$

$$\beta_j - \beta'_j = 0,$$

d.h. $\beta_j = \beta'_j$, gilt.

2) Was ist die Koordinatenabbildung bzgl. B ?

$$\varphi_B: V \rightarrow \mathbb{R}^n$$

$$v = \sum_{j=1}^n \beta_j \cdot b_j \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$$

in Worten: die Abbildung, welche einem Vektor $v \in V$ seine Koordinaten bzgl. B zuordnet.

φ_B ist die Koordinatenabbildung bzgl. B . φ_B ist linear und bijektiv!!

3) Was sind die Koordinaten von $w \in W$ bzgl. E ? Was ist die Koordinatenabbildung bzgl. E ?

Antwort: analog oben.

Damit können wir folgendes Diagramm bilden

$$\begin{array}{ccccc}
 \sum_{j=1}^n \beta_j b_j = v \in V & \xrightarrow{f} & W \ni f(v) = \sum_{j=1}^m \gamma_j c_j & & \\
 \downarrow \varphi_B & & \downarrow \varphi_C & & \downarrow \\
 \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n & \xrightarrow{A} & \mathbb{R}^m & \ni & \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}
 \end{array}$$

4) Was sind die Koordinaten von $f(v)$ bzgl. \mathcal{C} ?

Zwei Möglichkeiten der Berechnung:

a) Berechne $f(v)$ und finde $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ mit $f(v) = \sum_{j=1}^m \gamma_j c_j \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

b) Berechne die Matrix A von f bzgl. \mathcal{B}, \mathcal{C} und erhalte die gesuchten Koordinaten als

$$A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \quad (\text{Beachte: } A \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$$

Es gilt also

$$A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \quad (**)$$

oder anders geschrieben

$$A \cdot \varphi_B(v) = \varphi_C(f(v))$$

Beispiel

$$V = \mathbb{R}^2, \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

$$W = \mathbb{R}^3, \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

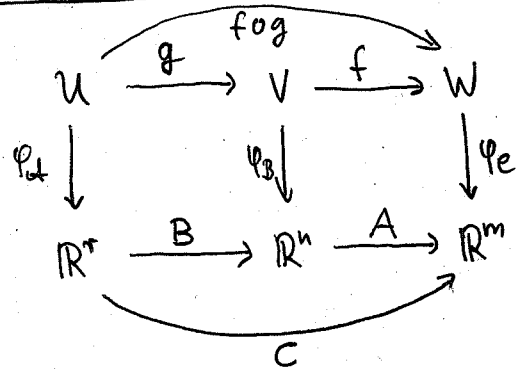
$$f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$$

$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun das obige Diagramm und überprüfen die Gleichheit $(**)$ in den Fällen der Basiswahl ab

- \mathcal{B}, \mathcal{C}
- $\mathcal{B}', \mathcal{C}$
- $\mathcal{B}, \mathcal{C}'$
- $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$

5) Weitere Situation Sei U \mathbb{R} -Vektorraum der Dimension r ; $A = \{a_1, \dots, a_r\}$ geord. Basis von U .



$g: U \rightarrow V$ linear

$A \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ Matrix von f bzgl. B, E

$B \in M_{m,n}(\mathbb{R})$ Matrix von g bzgl. U, B

Ist $C \in M_{m,r}(\mathbb{R})$ die Matrix von $f \circ g$ bzgl. U, E . Dann gilt

$$C = A \cdot B$$

Beispiel

$$g: \mathbb{R}^4 \rightarrow \mathbb{R}^2$$

Alle anderen Notationen wie in obigem Bsp.

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_1 \\ -x_3 \end{pmatrix}$$

und $U = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ Basis von \mathbb{R}^4 . Sei $u = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$.

Was sind die Koordinaten von $(f \circ g)(u)$ bzgl. E ?

Bestimme die Matrix B von g bzgl. U, B :

$$g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}, g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\leadsto B = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

Wir kennen A bereits aus obigem Beispiel: $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C = A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix}$$

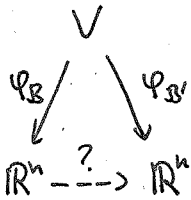
Die Koordinaten von $(f \circ g)(u)$ sind damit gegeben durch

$$C \cdot \varphi_U(u) = C \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & -1 & 0 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ -2 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Natürlich hätte man die Matrix C auch direkt bestimmen können, nämlich durch Berechnen von

$$(f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, (f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}, (f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \end{pmatrix}, (f \circ g)\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

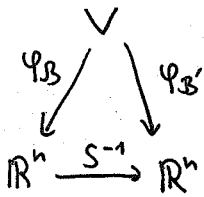
6) Basiswechsel von B nach B' : Kann man diesen Basiswechsel auch durch eine Matrix beschreiben?



Dies leistet die sogenannte Basistransformationsmatrix S von B nach B' ; die Spalten von S sind die Koordinaten der Vektoren der neuen Basis B' bzgl. der alten Basis B , d.h. S ist die der linearen Abbildung $\text{id}: V \rightarrow V$ bzgl. B', B zugeordnete Matrix. Es gilt

$$S \in \text{GL}_n(\mathbb{R}),$$

d.h. S ist invertierbar. Die zu S inverse Matrix S^{-1} leistet das Gewünschte, nämlich



Es gilt also für $v \in V$

$$S^{-1} \cdot \varphi_B(v) = \varphi_{B'}(v)$$

In Worten: Multipliziert man den Koordinatenvektor von v bzgl. B ~~von~~ links mit der Matrix S^{-1} , so erhält man den Koordinatenvektor von v bzgl. B' .

Beispiel

$V = \mathbb{R}^2$; B', B Basen wie oben. Wie lautet die Basistransformationsmatrix S von B nach B' ?

Schreibe die Vektoren von B' als Linearkombination der Vektoren aus B :

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \text{ bzw. } \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix};$$

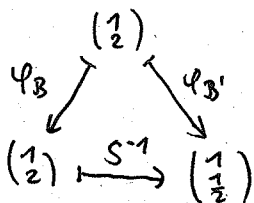
erhalte die Matrix

$$S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

Die Inverse von S berechnet sich zu

$$S^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Das obige Diagramm / die obige Formel für den Vektor $v = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:



Es gilt

$$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -\frac{1}{2} & \frac{1}{2} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ \frac{1}{2} \end{pmatrix}$$

Beispiel

$W = \mathbb{R}^3$; e', e Basen wie oben. Was ist die Basis transformationmatrix T von e nach e'

Schreibe

$$\begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

und erhalte

$$T = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

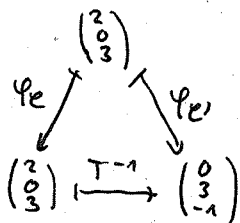
Damit berechnen wir die Inverse T^{-1} gemäß

$$\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 & 0 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 & -1 \end{array}$$

Es gilt also

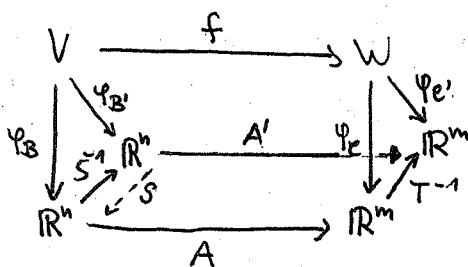
$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

und für den Vektor $w = \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} \in W$ (beispielsweise):



$$T^{-1} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \\ 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

7) Zusammenfassend erhalten wir das folgende Diagramm, welches kommutiert:



Es gilt

$$A' = T^{-1} \cdot A \cdot S$$

hierbei ist

A die f zugeordnete Matrix bzgl. B, e

A' die f zugeordnete Matrix bzgl. B', e'

Beispiel

Wir studieren die Formel 7) anhand unseres Beispiels $V = \mathbb{R}^2$, $W = \mathbb{R}^3$; f, B, B', e, e' wie oben,

$$\text{und } A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \text{ Matrix von } f \text{ bzgl. } B, e.$$

① Basiswechsel in V : B nach B'
Basiswechsel in W : e nach e'

Wir wissen bereits:

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und berechnen

$$T^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 2 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A' = \text{Matrix von } f \text{ bzgl. } B', e'.$$

Das entspricht der Berechnung in d).

② Basiswechsel in V : kein, d.h. B nach B
Basiswechsel in W : e nach e'

Wir haben

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und erhalten

$$T^{-1} \cdot A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & \frac{1}{2} & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & -1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} = A' = \text{Matrix von } f \text{ bzgl. } B, e'.$$

Das deckt sich mit dem Resultat aus c).

③ Basiswechsel in V : B nach B'
Basiswechsel in W : kein, d.h. e nach e

Wir haben in diesem Fall

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1} \cdot A \cdot S = A \cdot S = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 2 & 2 \end{pmatrix} = A' = \text{Matrix von } f \text{ bzgl. } B', e, \text{ was Rechnung in b) bestätigt.}$$

④ Basiswechsel in V : kein, d.h. B nach B
Basiswechsel in W : kein, d.h. e nach e

In diesem trivialen Fall ist

$$T^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}, S = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

und natürlich

$$A = T^{-1} \cdot A \cdot S.$$