11. Januar 2010

Überblick "Lineare Abbildungen und Matrizen"

V $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension n ; $\mathcal{B}=\{b_1,\dots,b_n\}$ geordnete Basis von V

W $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension m ; $\mathcal{C}=\{c_1,\dots,c_m\}$ geordnete Basis von W

$f: V \longrightarrow W$ lineare Abbildung

1) Sei $v \in V$. Was sind die Koordinaten von v bzgl. $\mathcal{B}$? Sind diese Koordinaten eindeutig?

Da $\mathcal{B}$ Basis von V, kann man schreiben $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot b_j$ mit gewissen $\beta_1,\dots,\beta_n \in \mathbb{R}$. Damit lauten die Koordinaten von v bzgl. $\mathcal{B}$

$$\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n.$$

Die Koordinaten sind eindeutig: denn gilt $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j' \cdot b_j$ für $\beta_1',\dots,\beta_n' \in \mathbb{R}$ mit $\beta_j' \neq \beta_j$ für mindestens ein $j \in \{1,\dots,n\}$, so folgt

$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot b_j = \sum_{j=1}^{n} \beta_j' \cdot b_j \iff \sum_{j=1}^{n} (\beta_j - \beta_j') \cdot b_j = 0 \quad \otimes$$

Da $\mathcal{B}$ eine Basis ist, sind $b_1,\dots,b_n$ insbesondere linear unabhängig. Damit folgt aus $\otimes$ sofort, dass für $j=1,\dots,n$

$$\beta_j - \beta_j' = 0,$$

d.h. $\beta_j = \beta_j'$, gilt.

2) Was ist die Koordinatenabbildung bzgl. $\mathcal{B}$?

$$\varphi_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$$
$$v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot b_j \mapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_m \end{pmatrix}$$

in Worten: die Abbildung, welche einem Vektor $v \in V$ seine Koordinaten bzgl. $\mathcal{B}$ zuordnet.

$\varphi_{\mathcal{B}}$ ist die Koordinatenabbildung bzgl. $\mathcal{B}$. $\varphi_{\mathcal{B}}$ ist linear und bijektiv!!

3) Was sind die Koordinaten von $w \in W$ bzgl. $\mathcal{C}$? Was ist die Koordinatenabbildung bzgl. $\mathcal{C}$?

Antwort: analog oben.

Damit können wir folgendes Diagramm bilden

$$\begin{tikzcd}
\sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot b_j = v \in V \arrow[r, "f"] \arrow[d, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"] & W \ni f(v) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot c_j \arrow[d, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n \arrow[r, dashed, "A"] & \mathbb{R}^m \ni \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

4) Was sind die Koordinaten von $f(v)$ bzgl. $\mathcal{C}$?

Zwei Möglichkeiten der Berechnung:

a) Berechne $f(v)$ und finde $\gamma_1, \dots, \gamma_m$ mit $f(v) = \sum_{j=1}^{m} \gamma_j \cdot c_j \Rightarrow \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m$

b) Berechne die Matrix A von f bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{C}$ und erhalte die gesuchten Koordinaten als

$$A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^m \qquad (\text{Beachte: } A \in M_{m,n}(\mathbb{R}))$$

Es gilt also

$$\boxed{A \cdot \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \gamma_1 \\ \vdots \\ \gamma_m \end{pmatrix} \qquad (**)}$$

oder anders geschrieben

$$\boxed{A \cdot \varphi_{\mathcal{B}}(v) = \varphi_{\mathcal{C}}(f(v))}$$

Beispiel

$V = \mathbb{R}^2 \quad , \mathcal{B} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\} \quad , \mathcal{B}' = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$

$W = \mathbb{R}^3 \quad , \mathcal{C} = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}, \mathcal{C}' = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$

$$f : \mathbb{R}^2 \longrightarrow \mathbb{R}^3$$
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} \xi_2 \\ 0 \\ \xi_1 + \xi_2 \end{pmatrix}$$

Wir bilden nun das obige Diagramm und überprüfen die Gleichheit (**) in den Fällen der Basiswahl als

a) $\mathcal{B}, \mathcal{C}$

b) $\mathcal{B}', \mathcal{C}$

c) $\mathcal{B}, \mathcal{C}'$

d) $\mathcal{B}', \mathcal{C}'$

a) $\mathcal{B}, \mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{E}}"] \\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "A"] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$\varphi_{\mathcal{B}}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + \underline{2} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$

$\varphi_{\mathcal{E}}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \underline{2} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + \underline{0} \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + \underline{3} \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

Berechnung von A:

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$, $f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

b) $\mathcal{B}', \mathcal{E}$:

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}"'] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{E}}"] \\ \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "A"] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&2\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}$$

$\varphi_{\mathcal{B}'}\left(\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \underline{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \underline{\tfrac{1}{2}} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}$

Berechnung von A:

$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&2\end{pmatrix}$

c) $\mathcal{B}, \mathcal{E}'$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{E}'}"] \\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "A"] & \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&0\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

$\varphi_{\mathcal{E}'}\left(\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$, da $\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \underline{3} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \underline{-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

Berechnung von A:

$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \underline{0} \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + \underline{1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} \underline{-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&0\end{pmatrix}$

d) $\mathcal{B}', \mathcal{E}'$

$$\begin{tikzcd} \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}'}"'] & \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{E}'}"] \\ \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \arrow[r, mapsto, "A"] & \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

$$A \cdot \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0&0\\2&2\\-1&0\end{pmatrix} \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

Berechnung von A:

$f\left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\\2\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} - 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$f\left(\begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\\2\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix} + 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}$

$\rightsquigarrow A = \begin{pmatrix}0&0\\2&2\\-1&0\end{pmatrix}$

5) <u>Weitere Situation</u> Sei $\mathcal{U}$ $\mathbb{R}$-Vektorraum der Dimension r; $\mathcal{A}=\{a_1,\dots,a_r\}$ geord. Basis von $\mathcal{U}$.
$g: \mathcal{U}\to V$ linear

$$\begin{tikzcd}
\mathcal{U} \arrow[r, "g"] \arrow[rr, bend left, "f\circ g"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{A}}"'] & V \arrow[r, "f"] \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] & W \arrow[d, "\varphi_{\mathcal{C}}"] \\
\mathbb{R}^r \arrow[r, "B"] \arrow[rr, bend right, "C"'] & \mathbb{R}^n \arrow[r, "A"] & \mathbb{R}^m
\end{tikzcd}$$

$A\in M_{n,r}(\mathbb{R})$ Matrix von f bzgl. $\mathcal{B},\mathcal{C}$

$B\in M_{m,n}(\mathbb{R})$ Matrix von g bzgl. $\mathcal{A},\mathcal{B}$

Ist $C\in M_{m,r}(\mathbb{R})$ die Matrix von $f\circ g$ bzgl. $\mathcal{A},\mathcal{C}$. Dann gilt

$$\boxed{C = A\cdot B}$$

<u>Beispiel</u> $g: \mathbb{R}^4 \longrightarrow \mathbb{R}^2$. Alle anderen Notationen wie in obigem Bsp.

$$\begin{pmatrix}\xi_1\\ \xi_2\\ \xi_3\\ \xi_4\end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix}\xi_1\\ -\xi_3\end{pmatrix}$$

und $\mathcal{A}=\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$ Basis von $\mathbb{R}^4$. Sei $u=\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4$.

Was sind die Koordinaten von $(f\circ g)(u)$ bzgl. $\mathcal{C}$?

Bestimme die Matrix B von g bzgl. $\mathcal{A},\mathcal{B}$:

$$g\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix},\quad g\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},\quad g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\quad g\left(\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}.$$

$$\rightsquigarrow B=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Wir kennen A bereits aus obigem Beispiel: $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$

$$\Rightarrow C=A\cdot B=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&0&-1&0\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}$$

Die Koordinaten von $(f\circ g)(u)$ sind damit gegeben durch

$$C\cdot\varphi_{\mathcal{A}}(u) = C\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&0\\1&0&-1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\1\\-2\\3\end{pmatrix}=\underline{\underline{\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}}}.$$

Natürlich hätte man die Matrix C auch direkt bestimmen können, nämlich durch Berechnen von

$$(f\circ g)\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\ (f\circ g)\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix},\ (f\circ g)\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}-1\\0\\-1\end{pmatrix},\ (f\circ g)\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix}=f\left(\begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

6) Basiswechsel von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$: Kann man diesen Basiswechsel auch durch eine Matrix beschreiben?

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, dashed, "?"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Dies leistet die sogenannte Basistransformationsmatrix S von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$; die Spalten von S sind die Koordinaten der Vektoren der neuen Basis $\mathcal{B}'$ bzgl. der alten Basis $\mathcal{B}$, d.h. S ist die der linearen Abbildung $id: V \to V$ bzgl. $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ zugeordnete Matrix. Es gilt

$$S \in Gl_n(\mathbb{R}),$$

d.h. S ist invertierbar. Die zu S inverse Matrix S^{-1} leistet das Gewünschte, nämlich

$$\begin{tikzcd} & V \arrow[dl, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] & \\ \mathbb{R}^n \arrow[rr, "S^{-1}"] & & \mathbb{R}^n \end{tikzcd}$$

Es gilt also für $v \in V$

$$\boxed{S^{-1} \cdot \varphi_{\mathcal{B}}(v) = \varphi_{\mathcal{B}'}(v)}$$

<u>In Worten:</u> Multipliziert man den Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}$ von links mit der Matrix S^{-1}, so erhält man den Koordinatenvektor von v bzgl. $\mathcal{B}'$.

<u>Beispiel</u>

$V = \mathbb{R}^2$; $\mathcal{B}', \mathcal{B}$ Basen wie oben. Wie lautet die Basistransformationsmatrix S von $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$?

Schreibe die Vektoren von $\mathcal{B}'$ als Linearkombination der Vektoren aus $\mathcal{B}$:

$$\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 1 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} \quad \text{, bzw.} \quad \begin{pmatrix}0\\2\end{pmatrix} = 0 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix};$$

erhalte die Matrix

$$S = \begin{pmatrix}1 & 0\\1 & 2\end{pmatrix}.$$

Die Inverse von S berechnet sich zu

$$S^{-1} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Das obige Diagramm / die obige Formel für den Vektor $v = \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$\begin{tikzcd} & \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[dl, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}}"'] \arrow[dr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{B}'}"] & \\ \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "S^{-1}"] & & \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix} \end{tikzcd}$$

Es gilt

$$S^{-1} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1 & 0\\-\frac{1}{2} & \frac{1}{2}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} \stackrel{!}{=} \begin{pmatrix}1\\\frac{1}{2}\end{pmatrix}.$$

Beispiel

$W=\mathbb{R}^3$; $\mathcal{C}'$, $\mathcal{C}$ Basen wie oben. Was ist die Basistransformationsmatrix T von $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$

Schreibe

$$\begin{pmatrix}0\\2\\0\end{pmatrix}=0\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+2\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\1\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+1\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix},\quad \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}=1\cdot\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}+0\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}.$$

und erhalte

$$T=\begin{pmatrix}0&1&1\\2&0&0\\0&1&0\end{pmatrix}.$$

Damit berechnen wir die Inverse T^{-1} gemäß

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc}0&1&1&1&0&0\\2&0&0&0&1&0\\0&1&0&0&0&1\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac12&0\\0&1&0&0&0&1\\0&1&1&1&0&0\end{array}\right)\longrightarrow\left(\begin{array}{ccc|ccc}1&0&0&0&\frac12&0\\0&1&0&0&0&1\\0&0&1&1&0&-1\end{array}\right)$$

Es gilt also

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}$$

und für den Vektor $w=\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}\in W$ (beispielsweise):

$$\begin{tikzcd}
& \begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[dl, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, mapsto, "\varphi_{\mathcal{C}'}"] & \\
\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix} \arrow[rr, mapsto, "T^{-1}"] & & \begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}
\end{tikzcd}$$

$$T^{-1}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0\\3\\-1\end{pmatrix}$$

7) Zusammenfassend erhalten wir das folgende Diagramm, welches kommutiert:

$$\begin{tikzcd}
V \arrow[rrr, "f"] \arrow[dd, "\varphi_B"'] \arrow[dr, "\varphi_{B'}"] & & & W \arrow[dd, "\varphi_{\mathcal{C}}"'] \arrow[dr, "\varphi_{\mathcal{C}'}"] & \\
& \mathbb{R}^n \arrow[rrr, "A'"] \arrow[dl, dashed, "S"] & & & \mathbb{R}^m \\
\mathbb{R}^n \arrow[rrr, "A"'] \arrow[ur, bend left, "S^{-1}"] & & & \mathbb{R}^m \arrow[ur, "T^{-1}"'] &
\end{tikzcd}$$

Es gilt

$$A'=T^{-1}\cdot A\cdot S$$

Hierbei ist

A die f zugeordnete Matrix bzgl. $\mathcal{B},\mathcal{C}$

A' die f zugeordnete Matrix bzgl $\mathcal{B}',\mathcal{C}'$

Beispiel

Wir studieren die Formel 7) anhand unseres Beispiels $V=\mathbb{R}^2$, $W=\mathbb{R}^3$; $f, \mathcal{B}, \mathcal{B}', \mathcal{C}, \mathcal{C}'$ wie oben,
und $A=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}$ Matrix von f bzgl. $\mathcal{B},\mathcal{C}$.

① Basiswechsel in V: $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$
Basiswechsel in W: $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$

Wir wissen bereits:

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

und berechnen

$$T^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\2&2\\-1&0\end{pmatrix}=A'=\text{Matrix von } f \text{ bzgl. } \mathcal{B}',\mathcal{C}'.$$

Dies entspricht der Berechnung in d).

② Basiswechsel in V: kein, d.h. $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}$
Basiswechsel in W: $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}'$

Wir haben

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

und erhalten

$$T^{-1}\cdot A\cdot S=\begin{pmatrix}0&\frac12&0\\0&0&1\\1&0&-1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&0\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}0&0\\1&1\\-1&0\end{pmatrix}=A'=\text{Matrix von } f \text{ bzgl. } \mathcal{B},\mathcal{C}'.$$

Dies deckt sich mit dem Resultat aus c).

③ Basiswechsel in V: $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}'$
Basiswechsel in W: kein, d.h. $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$

Wir haben in diesem Fall

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}$$

und

$$T^{-1}\cdot A\cdot S=A\cdot S=\begin{pmatrix}0&1\\0&0\\1&1\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}1&0\\1&2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}1&2\\0&0\\2&2\end{pmatrix}=A'=\text{Matrix von } f \text{ bzgl. } \mathcal{B}',\mathcal{C},$$

was Rechnung in b) bestätigt.

④ Basiswechsel in V: kein, d.h. $\mathcal{B}$ nach $\mathcal{B}$
Basiswechsel in W: kein, d.h. $\mathcal{C}$ nach $\mathcal{C}$

In diesem trivialen Fall ist

$$T^{-1}=\begin{pmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{pmatrix},\quad S=\begin{pmatrix}1&0\\0&1\end{pmatrix}$$

und natürlich

$$A=T^{-1}A\cdot S.$$