Aufgabe 1 (Serie 10)

Angenommen, es gilt

$$\circledast \quad \lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g + \lambda_3 \cdot h = 0$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$; hierbei bezeichne 0 die Nullabbildung

$$0 : \mathbb{R}^3 \longrightarrow \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

zu zeigen ist: $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$.

Die Annahme $\circledast$ bedeutet, dass für alle $\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichheit

$$\lambda_1 \cdot f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 \cdot g\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 \cdot h\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

gilt. Insbesondere gilt dann für $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichheit

$$\lambda_1 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 \cdot g\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 \cdot h\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (1)\ \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \text{ und} \\ (2)\ \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \end{array}$$

Analog gilt für $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ die Gleichheit

$$\lambda_1 \cdot f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_2 \cdot g\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) + \lambda_3 \cdot h\left(\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow$$

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \begin{array}{l} (3)\ \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \text{ und} \\ (4)\ \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \end{array}$$

Aus (4) und (2) folgt sofort

$$\lambda_3 = 0;$$

in (3) eingesetzt folgt

$$\lambda_1 = 0;$$

in (4) eingesetzt folgt

$$\lambda_2 = 0.$$

Damit gilt also $\lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ und wir haben gezeigt, dass die Abbildungen f, g, h linear unabhängig sind.

Aufgabe 2 (Serie 10)

$f: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat die bzgl. der Standardbasis zugeordnete Matrix $A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Dies bedeutet

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$
$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}.$$

Damit gilt für beliebiges $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$f\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right) \underset{f \text{ linear}}{=} \xi_1 \cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \xi_2 \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}\xi_2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\xi_2\\0\end{pmatrix}.$$

Damit gilt für beliebiges $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$(f \circ f)\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right) = f\left(f\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix}\xi_2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

und insbesondere

$$(f \circ f)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (f \circ f)\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix},$$

d.h. die <u>$f \circ f$ zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$</u>, (bzgl. der Standardbasis).

$g: \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ hat die bzgl. der Standardbasis zugeordnete Matrix $B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix}$.

Dies bedeutet

$$g\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix},$$
$$g\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}3\\2\end{pmatrix}.$$

Damit gilt für beliebiges $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$g\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right) = \xi_1 \cdot g\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) + \xi_2 \cdot g\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\xi_1\\\xi_1\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}3\xi_2\\2\xi_2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\xi_1 + 3\xi_2\\\xi_1 + 2\xi_2\end{pmatrix}.$$

Nun berechnen wir für beliebiges $\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$:

$$(g \circ f)\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right) = g\left(f\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right)\right) = g\left(\begin{pmatrix}\xi_2\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\xi_2\\\xi_2\end{pmatrix},$$
$$(f \circ g)\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right) = f\left(g\left(\begin{pmatrix}\xi_1\\\xi_2\end{pmatrix}\right)\right) = f\left(\begin{pmatrix}2\xi_1 + 3\xi_2\\\xi_1 + 2\xi_2\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}\xi_1 + 2\xi_2\\0\end{pmatrix};$$

und insbesondere

$$(g \circ f)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (g \circ f)\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix};$$
$$(f \circ g)\left(\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} \quad \text{und} \quad (f \circ g)\left(\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix}.$$

Damit folgt:

<u>Die $g \circ f$ zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, die $f \circ g$ zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.</u>

<u>Hinweis</u>: Mit mehr Wissen / Theorie können wir das später schneller berechnen:

$$A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad B \cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}, \quad A \cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Aufgabe 3 (Serie 10)

* Angenommen, es gilt

$$\lambda_1(2,1,3) + \lambda_2 \cdot (-2,4,6) = (0,0,0)$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$. Dann folgt

$$\begin{aligned} (1) \quad & 2\lambda_1 - 2\lambda_2 = 0, \\ (2) \quad & \lambda_1 + 4\lambda_2 = 0, \\ (3) \quad & 3\lambda_1 + 6\lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $\lambda_1 = \lambda_2$; eingesetzt in (2) folgt $\lambda_1 = \lambda_2 = 0$.
Damit gilt

$$rg_z(A) = 2$$

und, da $rg(A) = rg_z(A)$ ist, folgt sofort $\underline{rg(A) = 2}$.

* $rg(B) = rg_s(B) = rg_s\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{elementare} \\ \text{Spaltenumformung}}}{=} rg_s\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 0 \\ 3 & 0 \end{pmatrix} = 1.$

* $rg(C) = rg\begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Spalte + 3. Spalte}}}{=} rg\begin{pmatrix} -1 & 1 & 1 \\ 4 & -4 & 3 \\ -3 & 3 & -1 \end{pmatrix} \underset{\substack{\uparrow \\ \text{1. Spalte + 2. Spalte}}}{=} rg\begin{pmatrix} 0 & 1 & 1 \\ 0 & -4 & 3 \\ 0 & 3 & -1 \end{pmatrix} = rg_s\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ -4 & 3 \\ 3 & -1 \end{pmatrix} = 2;$

denn angenommen, es gilt

$$\lambda_1 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

für gewisse $\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbb{R}$, so folgt

$$\begin{aligned} (1) \quad & \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \\ (2) \quad & -4\lambda_1 + 3\lambda_2 = 0 \\ (3) \quad & 3\lambda_1 - \lambda_2 = 0. \end{aligned}$$

Aus (1) folgt $\lambda_1 = -\lambda_2$, eingesetzt in (3) folgt $\lambda_2 = 0$ und damit auch $\lambda_1 = 0$, d.h. die Spaltenvektoren

$$\begin{pmatrix} 1 \\ -4 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}$$

sind linear unabhängig.