Aufgabe 1 (Serie 10)

Es seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g + \lambda_3 \cdot h = \vec{0}$

(wobei $\vec{0}$ hier die Nullabbildung ist).

Dann gilt z.B. auch

$$(\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 \cdot g + \lambda_3 \cdot h)\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \vec{0}\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}2\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \ (I) \wedge \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 = 0 \ (II)$$

$$\underset{(II-I)}{\Rightarrow} \lambda_1 + 2\lambda_2 = 0 \wedge \lambda_3 - \lambda_2 = 0 \ (III)$$

Außerdem gilt auch:

$$(\lambda_1 \cdot f + \lambda_2 g + \lambda_3 \cdot h)\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \vec{0}\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + \lambda_2 \cdot g\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) + \lambda_3 \cdot h\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 \cdot \left(\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}\right) + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}2\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \lambda_1 + 2\lambda_3 = 0 \ (IV) \text{ und } \lambda_1 + \lambda_2 = 0 \ (V)$$

Mit $\boxed{I}$–$\boxed{V}$ folgt $\underline{\lambda_2 = 0}$.

Einsetzen in $\boxed{III}$ führt zu $\underline{\lambda_3 = 0}$.

Und mit $\boxed{I}$ wieder $\underline{\lambda_1 = 0}$.

Also sind f, g und h linear unabhängig.

$\blacksquare$

Aufgabe 2 (Serie 10)

$\boxed{f\circ f}$ $A\cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

$f\circ f$ ist die Nullabbildung die zugeordnete Matrix bzgl. der kanonischen Basis ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\boxed{g\circ f}$ $B\cdot A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

Die zu $g\circ f$ zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

$\boxed{f\circ g}$ $A\cdot B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$

Die zu $f\circ g$ zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Ausführlich für $f\circ f$:

$\cancel{f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} =}$ $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = A\cdot\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

$$= \begin{pmatrix} 0\cdot x + 1\cdot y \\ 0\cdot x + 0\cdot y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}$$

und $f\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = A\cdot\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0\cdot y + 1\cdot 0 \\ 0\cdot y + 0\cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$

$\Rightarrow f\left(f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)\right) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$.

$\Rightarrow f$ ist die Nullabbildung und die zugeordnete Matrix ist $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

$\hookrightarrow$

Und auch nochmal ausführlicher für $g \circ f$.

Wir wissen schon, dass

$$f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \text{ gilt.}$$

Berechne $g\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right)$:

$$g\left(\begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix}\right) = B \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} y \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y + 3 \cdot 0 \\ y + 2 \cdot 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2y \\ y \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad \forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2.$$

Also ist $\begin{pmatrix} 0 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die zugeordnete Matrix zu $g \circ f$.

Aufgabe 3 (Serie 10)

Rang von A

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ -2 & 4 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid +1.\text{ Zeile} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 0 & 5 & 9 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{rang}(A) = \underline{\underline{2}}\,.$$

Rang von B

$$B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 2 & 4 \\ 3 & 6 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \mid -2\cdot 1.\text{ Zeile} \\ \mid -3\cdot 1.\text{ Zeile} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \operatorname{rang}(B) = \underline{\underline{1}}$$

Rang von C

$$C = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 3 \\ -2 & 3 & -1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid +2\cdot 2.\text{ Zeile} \\ \\ \mid +2\cdot 2.\text{ Zeile} \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & -7 & 7 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -5 & 5 \end{pmatrix} \begin{matrix} \mid : -7 \\ \\ \mid : 5 \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & -1 & 1 \end{pmatrix} \begin{matrix} \\ \\ \mid +1.\text{ Zeile} \end{matrix}$$

$$\sim \begin{pmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 1 & -4 & 3 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \begin{matrix} \uparrow \\ \downarrow \\ \end{matrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & -4 & 3 \\ 0 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \operatorname{Rang}(C) = \underline{\underline{2}}$$

Aufgabe 7* (Serie 10)

$\boxed{a}$ • Es ist $\ker f_1 = \operatorname{im} f_0 = \operatorname{im}(f_0 : \{0\} \to V_1)$

$$= \{v_1 \in V_1 \mid \exists x \in \{0\} : f_0(x) = v_1\} = \{f_0(0)\}$$
$$= \{0_{V_1}\}$$

$\Rightarrow f_1$ ist injektiv.

• Es ist auch $\operatorname{im} f_2 = \ker f_3 = \ker(f_3 : V_3 \to \{0\})$

$$= \{v_3 \in V_3 \mid f_3(v_3) = 0\} = V_3$$

$\Rightarrow f_2$ ist surjektiv.

• Da f_2 eine lineare Abbildung ist, gilt:

$$\dim_{\mathbb{R}}(V_2) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f_2) + \dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{\operatorname{im} f_2}_{= V_3 \text{ (siehe oben)}})$$
$$= \dim_{\mathbb{R}}(\ker f_2) + \dim_{\mathbb{R}}(V_3)$$
$$\underset{\text{Vor.}}{=} \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f_1) + \dim_{\mathbb{R}}(V_3)$$
$$\underset{\substack{\text{da } f_1 \\ \text{linear}}}{=} \left[\dim_{\mathbb{R}}(V_1) - \dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{\ker f_1}_{=\{0\} \text{ (siehe oben)}})\right] + \dim_{\mathbb{R}}(V_3)$$
$$= \dim_{\mathbb{R}}(V_1) - 0 + \dim_{\mathbb{R}}(V_3) \quad \blacksquare$$

$\boxed{b}$ Was wissen wir über f_2?

Aus $\boxed{a}$ wissen wir: $\operatorname{im} f_2 = \mathbb{R}$. (d.h. aber im Grunde nur, dass f_2 nicht die Nullabbildung ist.)

Und wir wissen, dass $\ker f_2 = \operatorname{im} f_1$.

Berechnen wir also $\operatorname{im} f_1$:

$$\operatorname{im} f_1 = \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ 2x-y \\ 3y \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \exists x, y \in \mathbb{R} : \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = x \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + y \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle. \quad (= \ker f_2)$$

Wir wissen also $f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = 0$ und $f\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0$.

Nun ergänzen wir $\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ zu einer Basis von $\mathbb{R}^3$.

z.B. mit Hilfe des Vektors: $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Man prüft leicht, dass $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}$ tatsächlich eine Basis des $\mathbb{R}^3$ ist.

Die Funktion f_2 ist nach dem Prinzip der linearen Fortsetzung eindeutig bestimmt, falls die Funktionswerte $f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right), f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ und $f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right)$ in $\mathbb{R}$ festgelegt sind. Es bleibt nur $f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right)$ festzulegen. Als einzige Einschränkung haben wir $f\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) \neq 0$, da andernfalls $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in \ker f_2$ wäre (und der Kern also größer, als $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} \right\rangle$.

~~Sei also $\alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ beliebig, dann beschreibt die~~

Die Menge aller geeigneten Funktion f_2 ist also:

$$\left\{ f_2 : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R} \text{ linear} \;\middle|\; f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = f_2\left(\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = 0,\ f_2\left(\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right) = \alpha,\ \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \right\}.$$

Für einen Vektor $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt: $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \frac{1}{3} \cdot z \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 3 \end{pmatrix} + \left(\frac{y}{2} + \frac{z}{6}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 0 \end{pmatrix} + \left(x - \frac{z}{6} - \frac{y}{2}\right) \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Daher ist f_2 also von der Form:

$$f_2\left(\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right) = \alpha \cdot \left(x - \frac{z}{6} - \frac{y}{2}\right) \quad \text{mit } \alpha \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \text{ geeignet.}$$

∎