Aufgabe 3:

$f: P_3 \to P_3,\ p(t) \mapsto p'(t)$

betrachte die Basen des P_3 $\mathcal{B} = \{1, 1-t, (1-t)^2, (1-t)^3\}$ und

$\mathcal{E} = \{1, t, t^2, t^3\}$.

(a) · Bestimme die Bilder der Basisvektoren in $\mathcal{B}$ unter der Abb. f:

$f(1) = 0$, $f(1-t) = -1$, $f(t^2-2t+1) = 2t-2$, $f(-t^3+3t^2-3t+1) = -3t^2+6t-3$.

Damit ergibt sich die Matrix

$$M^{\mathcal{B}}_{\mathcal{E}}(f) = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) · $A^2 = A \cdot A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^3 = A^2 A = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$, $A^4 = 0$

$\rightsquigarrow$ A ist nilpotent.

· $(E+A)(E-A+A^2-A^3) = (E^2-A+A^2-A^3) + (A-A^2+A^3-A^4) =$

$= \underbrace{E^2}_{E} - \underbrace{A^4}_{0} = E$,

also ist $E+A$ invertierbar mit $(E+A)^{-1} = E-A+A^2-A^3$.

Bemerke, dass nicht die genaue Gestalt von A, sondern nur $A^4=0$ ausgenutzt wurde.

(c) · Betrachte den Rang von A, A^2, A^3 und A^4:

$\operatorname{rg} A = 3$, $\operatorname{rg} A^2 = 2$, $\operatorname{rg} A^3 = 1$, $\operatorname{rg} A^4 = 0$.

· Nach dem Dimensionssatz linearer Abb. gilt also für $\varphi = A, A^2, A^3, A^4$

$$\dim \ker \varphi = \dim \mathbb{R}^4 - \operatorname{rg} \varphi.$$

Damit muss gelten:

$$\ker A \subsetneq \ker A^2 \subsetneq \ker A^3 \subsetneq \ker A^4 = \mathbb{R}^4.$$