Aufgabe 1 (Serie 11)

$A_1 \in M_{1,2}(\mathbb{R})$, $A_2 \in M_2(\mathbb{R})$, $A_3 \in M_{3,2}(\mathbb{R})$, $A_4 \in M_{4,1}(\mathbb{R})$, $A_5 \in M_{3,4}(\mathbb{R})$.

Damit existieren die folgenden Matrizenprodukte:

$$A_1 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 5 & 6 \end{pmatrix} \in M_{1,2}(\mathbb{R}),$$

$$A_2 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{pmatrix} \in M_2(\mathbb{R}),$$

$$A_3 \cdot A_2 = \begin{pmatrix} 0 & -6 \\ 6 & 8 \\ 11 & 22 \end{pmatrix} \in M_{3,2}(\mathbb{R}),$$

$$A_4 \cdot A_1 = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 6 & 9 \\ 10 & 15 \\ 14 & 21 \end{pmatrix} \in M_{4,2}(\mathbb{R}),$$

$$A_5 \cdot A_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 25 \\ -22 \end{pmatrix} \in M_{3,1}(\mathbb{R}).$$

Aufgabe 2 (Serie 11)

$A = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $B = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ $(a, b \in \mathbb{R})$.

(a) $A^2 = \begin{pmatrix} 1 & 2a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$, $A^3 = \begin{pmatrix} 1 & 3a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$; $B^2 = \begin{pmatrix} b^2 & b^2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$, $B^3 = \begin{pmatrix} b^3 & b^3 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$.

Für $n \in \mathbb{N}, n > 0$ gilt:

$$A^n = \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \quad ; \quad B^n = \begin{pmatrix} b^n & b^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Beweis per Induktion (über n):

Induktionsanfang ($n=1$): $A^1 = A = \begin{pmatrix} 1 & 1 \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ ✓ ; $B^1 = B = \begin{pmatrix} b^1 & b^1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ ✓

Induktionsschritt:

$$A^{n+1} = A^n \cdot A \underset{\substack{\uparrow \\ \text{Induktions-} \\ \text{voraussetzung}}}{=} \begin{pmatrix} 1 & n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & a + n \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & (n+1) \cdot a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} ;$$

$$B^{n+1} = B^n \cdot B \underset{\substack{\uparrow \\ \text{I.V.}}}{=} \begin{pmatrix} b^n & b^n \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^n \cdot b & b^n \cdot b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b^{n+1} & b^{n+1} \\ 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen $(A+B)^2 = (A+B) \cdot (A+B) = A \cdot A + A \cdot B + B \cdot A + B \cdot B =$
$= A^2 + A \cdot B + B \cdot A + B^2$.

Es gilt also zu prüfen, für welche $a, b \in \mathbb{R}$ die Gleichheit

$$A \cdot B = B \cdot A$$

gilt. Wir berechnen für $a, b \in \mathbb{R}$

$$A \cdot B = \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

$$B \cdot A = \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & ba + b \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$$

und damit gilt

$$A \cdot B = B \cdot A \Leftrightarrow \begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} b & ba+b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow b = b \cdot a + b \Leftrightarrow 0 = b \cdot a$$

$\Leftrightarrow b = 0 \lor a = 0$.

Damit gilt die Gleichheit

$$(A+B)^2 = A^2 + 2AB + B^2$$

einschließendes "oder"

nur, falls $B = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}$ die Nullmatrix ist oder $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ die Einheitmatrix ist (oder beides).

(c) Ansatz

$$\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 + a \cdot a_3 & a_2 + a \cdot a_4 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_1 + a \cdot a_3 = 1 \\ a_2 + a \cdot a_4 = 0 \\ a_3 = 0 \\ a_4 = 1 \end{cases}$$

Damit folgt $a_1 = 1$, $a_2 = -a$, $a_3 = 0$, $a_4 = 1$ und die zu A inverse Matrix A^{-1} ist von der Form

$$A^{-1} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

[Test: Es gilt in der Tat: $\begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 1 & a \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$]

Nun berechnen wir

$$A \cdot X = B_1 \Leftrightarrow A^{-1} \cdot (A \cdot X) = A^{-1} \cdot B_1 \Leftrightarrow (A^{-1} \cdot A) \cdot X = A^{-1} \cdot B_1 \Leftrightarrow$$

$$\Leftrightarrow E \cdot X = A^{-1} \cdot B_1 \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B_1 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} 13 \\ 14 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{X = \begin{pmatrix} 13 - a \cdot 14 \\ 14 \end{pmatrix}}$$

und analog

$$A \cdot X = B_2 \Leftrightarrow X = A^{-1} \cdot B_2 \Rightarrow X = \begin{pmatrix} 1 & -a \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \underline{\underline{X = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}}.$$

(d) Ansatz:

$$\begin{pmatrix} b & b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} a_1 & a_2 \\ a_3 & a_4 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix} \qquad (a_1, a_2, a_3, a_4 \in \mathbb{R})$$

$$\Leftrightarrow \begin{pmatrix} a_1 \cdot b + a_3 \cdot b & a_2 \cdot b + a_4 \cdot b \\ 0 & 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow 0 = 1 \quad \lightning$$

$\Rightarrow$ B ist nicht invertierbar.

Aufgabe 3 (Serie 11)

(a) Die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ unter f sind

$$f(1) = 0,$$
$$f(1-t) = -1,$$
$$f((1-t)^2) = f(1-2t+t^2) = -2+2t,$$
$$f((1-t)^3) = f(1-3t+3t^2-t^3) = -3+6t-3t^2$$

und es gilt

$$f(1) = 0 = 0\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3,$$
$$f(1-t) = -1 = (-1)\cdot 1 + 0\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3,$$
$$f((1-t)^2) = -2+2t = (-2)\cdot 1 + 2\cdot t + 0\cdot t^2 + 0\cdot t^3,$$
$$f((1-t)^3) = -3+6t-3t^2 = (-3)\cdot 1 + 6\cdot t + (-3)\cdot t^2 + 0\cdot t^3.$$

Damit besitzen die Bilder der Basisvektoren aus $\mathcal{B}$ die folgenden Koordinaten bzgl. $\mathcal{E}$

$\begin{pmatrix} 0\\0\\0\\0 \end{pmatrix}_{\mathcal{E}}$ ← Koordinaten von $f(1)$

$\begin{pmatrix} -1\\0\\0\\0 \end{pmatrix}$ ← Koordinaten von $f(1-t)$

$\begin{pmatrix} -2\\2\\0\\0 \end{pmatrix}$ ← Koordinaten von $f((1-t)^2)$

$\begin{pmatrix} -3\\6\\-3\\0 \end{pmatrix}$ ← Koordinaten von $f((1-t)^3)$

und die f zugeordnete Matrix A bzgl. $\mathcal{B}, \mathcal{E}$ hat die Form

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 0 & 2 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

(b) Wir berechnen

$$A^2 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^3 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}, \quad A^4 = \begin{pmatrix} 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix} \overset{\text{Nullmatrix}}{=:} 0$$

Weiter gilt

$$\begin{aligned}(E+A)(E-A+A^2-A^3) &= E\cdot E - E\cdot A + E\cdot A^2 - E\cdot A^4 + A\cdot E - A\cdot A + A\cdot A^2 - A\cdot A^3 \\ &= E - A + A^2 - A^4 + A - A^2 + A^3 - \underbrace{A^4}_{=0 \,\leftarrow\, \text{Nullmatrix}} \\ &= E - 0 \\ &= E,\end{aligned}$$

d.h. $E+A$ ist invertierbar.

(c) Zunächst gilt

$$\ker(A^k) \subseteq \ker(A^{k+1}) \qquad (k=1,2,3),$$

da für $X \in \mathbb{R}^4, O \in \mathbb{R}^4$ die Implikation

$$X \in \ker(A^k) \Rightarrow A^k \cdot X = 0 \Rightarrow A(A^k \cdot X) = A \cdot O \Leftrightarrow A^{k+1} \cdot X = 0 \Leftrightarrow X \in \ker(A^{k+1}),$$

d.h. $X \in \ker(A^k) \Rightarrow X \in \ker(A^{k+1})$

gilt. Weiter gilt für

$$X_2 := \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad X_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

die Gleichheit

$$A \cdot X_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^2 \cdot X_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^2 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^3 \cdot X_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$A^3 \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 6 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \quad \text{und} \quad A^4 \cdot X_4 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix},$$

d.h. es gilt $X_k \in \ker(A^k) \setminus \ker(A^{k-1})$ für $k=2,3,4$. Damit gilt

$$\ker(A^k) \subsetneq \ker(A^{k+1}) \qquad (k=1,2,3).$$

Schließlich gilt trivialerweise, dass für $A^4 = 0$

$$\ker(A^4) = \ker(0) = \mathbb{R}^4$$

gilt.

<u>Bemerkung</u>: Wählt man jeweils die Standardbasis des $\mathbb{R}^4$, so ist die zu der linearen Abbildung A^k zugeordnete Matrix (bzgl. der Standardbasis) genau die Matrix A^k. Damit folgt mit Hilfe von 3(b) sofort

$$4-k = \operatorname{rg}(A^k) = \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{Im} A^k) \qquad (k=1,2,3,4)$$

woraus sofort

$$\dim_{\mathbb{R}}(\ker A^k) = k \qquad (k=1,2,3,4)$$

folgt. Damit kann die Gleichheit $\ker(A^k) = \ker(A^{k+1})$ aus Dimensionsgründen ausgeschlossen werden!!

Aufgabe 4 (Serie 11) $A \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B \in M_{p,q}(\mathbb{R})$, $C \in M_{r,s}(\mathbb{R})$

Dann sind die Produkte $A \cdot B$ für $n = p$ und $B \cdot C$ für $q = r$ definiert und es gilt $A \cdot B \in M_{m,q}(\mathbb{R})$ und $B \cdot C \in M_{p,s}(\mathbb{R})$. Damit ist das Produkt

$$(A \cdot B) \cdot C \quad , \text{bzw. } A \cdot (B \cdot C)$$

definiert, falls $q = r$, bzw. $n = p$ gilt.

Insgesamt folgt, dass die Ausdrücke $(A \cdot B) \cdot C$ und $A \cdot (B \cdot C)$ für alle $m, n, p, q, r, s \in \mathbb{N}$ mit $n = p$ und $q = r$ definiert sind und es gilt

$$(A \cdot B) \cdot C \in M_{m,s}(\mathbb{R}) \text{ und } A \cdot (B \cdot C) \in M_{m,s}(\mathbb{R}).$$

Sei nun $A = (\alpha_{k,j}) \in M_{m,n}(\mathbb{R})$, $B = (\beta_{j,\ell}) \in M_{n,r}(\mathbb{R})$ und $C = (\gamma_{\ell,q}) \in M_{r,s}(\mathbb{R})$.

Dann gilt einerseits mit $\delta_{k,\ell} := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} \cdot \beta_{j,\ell}$ $(k = 1, \ldots, m;\ \ell = 1, \ldots, r)$

$$\begin{aligned}\underline{(A \cdot B) \cdot C} &= (\delta_{k,\ell}) \cdot C \\ &= (\delta_{k,\ell}) \cdot (\gamma_{\ell,q}) \\ &= \underline{(\rho_{k,q})}, \qquad (1)\end{aligned}$$

wobei

$$\rho_{k,q} := \sum_{\ell=1}^{r} \delta_{k,\ell} \cdot \gamma_{\ell,q} \qquad (k = 1, \ldots, m;\ q = 1, \ldots, s).$$

Andererseits gilt mit $\tilde{\delta}_{j,q} := \sum_{\ell=1}^{r} \beta_{j,\ell} \cdot \gamma_{\ell,q}$ $(j = 1, \ldots, n;\ q = 1, \ldots, s)$

$$\begin{aligned}\underline{A \cdot (B \cdot C)} &= A \cdot (\tilde{\delta}_{j,q}) \\ &= (\alpha_{k,j}) \cdot (\tilde{\delta}_{j,q}) \\ &= \underline{(\tilde{\rho}_{k,q})}, \qquad (2)\end{aligned}$$

wobei

$$\tilde{\rho}_{k,q} := \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} \cdot \tilde{\delta}_{j,q} \qquad (k = 1, \ldots, m;\ q = 1, \ldots, s).$$

Nun gilt aber für $k = 1, \ldots, m$ und $q = 1, \ldots, s$

$$\rho_{k,q} = \sum_{\ell=1}^{r} \delta_{k,\ell} \cdot \gamma_{\ell,q} = \sum_{\ell=1}^{r} \left(\sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} \cdot \beta_{j,\ell} \right) \cdot \gamma_{\ell,q} = \sum_{j=1}^{n} \sum_{\ell=1}^{r} \alpha_{k,j} \cdot \beta_{j,\ell} \cdot \gamma_{\ell,q} =$$

$$= \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} \left(\sum_{\ell=1}^{r} \beta_{j,\ell} \cdot \gamma_{\ell,q} \right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_{k,j} \cdot \tilde{\delta}_{j,q} = \tilde{\rho}_{k,q}.$$

Damit folgt (zusammen mit (1) und (2)) die Gleichheit

$$(A \cdot B) \cdot C = A \cdot (B \cdot C).$$