Aufgabe 4

„$\Rightarrow$" $v_1 - v, \ldots, v_n - v$ linear ~~una~~abhängig

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle Null mit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (v_k - v) = 0 \qquad (*)$$

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle Null mit

$$\sum_{k=1}^{n} \Big(\lambda_k - \alpha_k \sum_{j=1}^{n} \lambda_j\Big) \cdot v_k = 0$$

$v_1, \ldots, v_n$ lin. unabh.

$\Leftrightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle Null mit

$$\lambda_k = \alpha_k \cdot \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \qquad (\text{für } k = 1, \ldots, n)$$

$\Rightarrow$ $\exists \lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbb{R}$ nicht alle Null mit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = \sum_{j=1}^{n} \lambda_j \cdot \sum_{k=1}^{n} \alpha_k$$

$$\Rightarrow \quad \underline{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1} \quad \vee \quad \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0}$$

Dies kann nicht gelten, da wegen $(*)$ sofort die ~~gleichsetz~~ Gleichheit

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot v_k = v \cdot \sum_{k=1}^{n} \lambda_k = 0$$

folgte, im Widerspruch zur linearen Unabhängigkeit von $v_1, \ldots, v_n$.

„$\Leftarrow$" Gilt umgekehrt $\sum_{k=1}^{n} \alpha_k = 1$, so sind die Zahlen

$$\lambda_k := \alpha_k \in \mathbb{R} \quad \text{nicht alle Null}$$

und erfüllen

$$\sum_{k=1}^{n} \lambda_k \cdot (v_k - v) = \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k \cdot v_k}_{v} - v \cdot \underbrace{\sum_{k=1}^{n} \alpha_k}_{1} = 0,$$

d.h. $v_1 - v, \ldots, v_n - v$ sind linear abhängig.