Aufgabe 1 (serie 3)

Aus der Vorlesung wissen wir, das U_1+U_2 ein Unterraum von $\mathbb{R}^3$ ist. Insbesondere gilt also $U_1+U_2 \subseteq \mathbb{R}^3$.

Es genügt also zu zeigen, dass $\mathbb{R}^3 \subseteq U_1+U_2$.

Wir stellen zunächst ein paar Spezialfälle fest.

Sei

$$v := \begin{pmatrix} 1/3 \\ 1/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}.$$ Dann ist offenbar $v \in U_2$.

Seien außerdem

$$w_1 := \begin{pmatrix} \frac{2}{3} \\ -\frac{1}{3} \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix}; \quad w_2 := \begin{pmatrix} -\frac{1}{3} \\ 2/3 \\ -\frac{1}{3} \end{pmatrix} \text{ und } w_3 := \begin{pmatrix} -1/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}.$$

Offenbar sind w_1, w_2 und w_3 aus U_1 gewählt.
Beispielsweise ist $w_1 \in U_1$, da $\frac{2}{3} - \frac{1}{3} - \frac{1}{3} = 0$. w_2, w_3 analog.

Es folgt

$$w_1 + v = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1+U_2; \quad w_2+v = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \in U_1+U_2; \quad w_3+v = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \in U_1+U_2$$

$$\Rightarrow \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle \subseteq U_1 + U_2$$

Weil $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$ laut ~~Vorlesung~~ Aufgabe 2 der kleinste Vektorraum ist, der $\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}; \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ enthält.

Ferner ist natürlich $\left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \mathbb{R}^3$.

Also ist $\mathbb{R}^3 \subseteq U_1+U_2$

$\blacksquare$

Aufgabe 2 (Serie 5)

Es sei $U \subseteq V$ ein Unterraum von V mit der Eigenschaft $v_1 \in U,\ v_2 \in U, \dots, v_n \in U$.

z.z. $\langle v_1, v_2, \dots, v_n\rangle \subseteq U$. und $\langle v_1, \dots, v_n\rangle$ ist Unterraum von V.

Beweis:

(1) Seien $\lambda_1, \lambda_2, \dots, \lambda_n$ beliebig aus $\mathbb{R}$ gewählt.
Da U ein Unterraum ist, gilt:

$$\left.\begin{array}{l} v_1 \in U \Rightarrow \lambda_1 v_1 \in U \\ v_2 \in U \Rightarrow \lambda_2 v_2 \in U \\ \vdots \\ v_n \in U \Rightarrow \lambda_n v_n \in U. \end{array}\right\} \overset{(*)}{\Longrightarrow} \lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \dots + \lambda_n v_n \in U.$$

Wieder, da U ein Unterraum ist.

Da per Definition $\langle v_1, \dots, v_n\rangle = \{\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \mid \lambda_1, \dots, \lambda_n \in \mathbb{R}\}$
haben wir gezeigt $\langle v_1, \dots, v_n\rangle \subseteq U$. ∎

(2) ~~Bei~~ z.z. $\langle v_1, \dots, v_n\rangle$ ist Unterraum.

I $\langle v_1, \dots, v_n\rangle \neq \emptyset$ da z.B. $v_1 = 1 \cdot v_1 + 0 \cdot v_2 + 0 \cdot v_3 + \dots + 0 \cdot v_n \in \langle v_1, \dots, v_n\rangle$

II Sei $\xi \in \mathbb{R}$ beliebig und $\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n \in \langle v_1, \dots, v_n\rangle$ ebenfalls beliebig. Dann ist:

$$\xi \cdot (\lambda_1 v_1 + \dots + \lambda_n v_n) \overset{V}{=} (\xi \cdot \lambda_1) \cdot v_1 + \dots + (\xi \cdot \lambda_n)\, v_n \in \langle v_1, \dots, v_n\rangle$$

da $(\xi \cdot \lambda_1) \in \mathbb{R}, (\xi \cdot \lambda_2) \in \mathbb{R}, \dots, (\xi \cdot \lambda_n) \in \mathbb{R}$.

$\longrightarrow$

(*) Genau genommen fordern die Unterraumaxiome nur:

$$x_1, x_2 \in U \Rightarrow x_1 + x_2 \in U.$$

Mit Hilfe von vollständiger Induktion und dem Assoziativgesetz folgt aber sehr leicht: $\forall n \in \mathbb{N}$:

$$x_1, x_2, \dots, x_n \in U \Rightarrow x_1 + x_2 + \dots + x_n \in U.$$

Es ist ja $x_1 + \dots + x_{n-1} + x_n = (x_1 + \dots + x_{n-1}) + x_n$. (Induktionsschritt)

Bemerkung: Genau genommen ist V^1 wieder mit vollständiger Induktion zu zeigen, diesmal unter Ausnutzung des Distributivgesetzes. Der Induktionsschritt geht so:

$$\xi\cdot(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1}+\lambda_n v_n) \underset{\text{Assoz.}}{=} \xi\cdot[(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1})+\lambda_n v_n]$$

$$\underset{\text{Distributiv}}{=} \xi\cdot(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_{n-1}v_{n-1})+\xi(\lambda_n v_n)$$

$$\underset{\text{Induktionsvor.}}{=} [(\xi\lambda_1)v_1+\dots+(\xi\lambda_{n-1})v_{n-1}]+\xi(\lambda_n v_n)$$

$$\underset{\text{Assoz. + Axiom}}{=} (\xi\lambda_1)v+\dots+(\xi\lambda_{n-1})v_{n-1}$$

Assoz. + Axiom: $\alpha\cdot(\beta x)=(\alpha\cdot\beta)\cdot x$ $\forall \alpha,\beta\in\mathbb{R}, x\in V$ (Namenlose Rechenregel, vielleicht eher „Distributivregel" da 2 Operationen beteiligt sind.

Der Induktionsanfang ist ähnlich spannend.

III Seien nun $\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n$ und $\mu_1 v_1+\dots+\mu_n v_n$ aus $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$, so ist

$$(\lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n)+(\mu_1 v_1+\dots+\mu_n v_n)$$

$$\underset{\text{Ass.}}{=} \lambda_1 v_1+\dots+\lambda_n v_n+\mu_1 v_1+\dots+\mu_n v_n$$

$$\underset{\substack{\text{Kommutativität}\\ \text{(+ Induktion)}}}{=} \lambda_1 v_1+\mu_1 v_1+\lambda_2 v_2+\mu_2 v_2+\dots+\lambda_n v_n+\mu_n v_n$$

$$\underset{\substack{\text{Distributivität}\\ \text{(+ Induktion)}}}{=} \underbrace{(\lambda_1+\mu_1)}_{\in\mathbb{R}}\cdot v_1+\dots+\underbrace{(\lambda_n+\mu_n)}_{\in\mathbb{R}}v_n \in \langle v_1,\dots,v_n\rangle$$

Aus I, II und III folgt: $\langle v_1,\dots,v_n\rangle$ ist Untervektorraum. ∎

Aufgabe 3 (serie 5)

$\boxed{a}$ Offenbar gilt:

$$v_2 + 3 \cdot v_3 = \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + 3 \begin{pmatrix} 0 \\ 2 \\ -3 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2+0 \\ -4+6 \\ 11-9 \\ 2+0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} = 2 \cdot v_1 \qquad (I)$$

$$\Longleftrightarrow (-2) v_1 + v_2 + 3 \cdot v_3 = 0$$

Also sind v_1, v_2 und v_3 <u>nicht</u> linear unabhängig. ∎

$\boxed{b}$ Ganz offensichtlich sind v_1 und v_2 linear unabhängig, da v_2 definitiv kein Vielfaches von v_1 ist.

Außerdem gilt laut (I) $\frac{2}{3} v_1 \cancel{+} - \frac{1}{3} v_2 = v_3$

Also <u>erzeugen</u> v_1 und v_2 das Erzeugendensystem (v_1, v_2, v_3) vom Raum $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$

$\Rightarrow (v_1, v_2)$ erzeugen $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$.

<u>Resultat:</u> (v_1, v_2) ist ein linear unabhängiges Erzeugendensystem von $\langle v_1, v_2, v_3 \rangle$ also eine <u>Basis</u>. ∎

$\boxed{c}$ Bevor wir groß theoretisieren versuchen wir es einfach naiv.

Seien $e_3 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $e_4 := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$.

<u>Behauptung</u>: (v_1, v_2, e_3, e_4) ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

<u>Beweis:</u> Sei $w = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ beliebig. Wir versuchen w darzustellen:

Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3, \lambda_4 \in \mathbb{R}$ mit

$$\lambda_1 v_1 + \lambda_2 v_2 + \lambda_3 e_3 + \lambda_4 e_4 = w \qquad \Longleftrightarrow \ldots$$

$$\ldots \Longleftrightarrow \lambda_1 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix} + \lambda_2 \begin{pmatrix} 2 \\ -4 \\ 11 \\ 2 \end{pmatrix} + \lambda_3 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + \lambda_4 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \\ d \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{(stilisiert)}}{\Longleftrightarrow} \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ 1 & -4 & 0 & 0 & b \\ 1 & 11 & 1 & 0 & c \\ 1 & 2 & 0 & 1 & d \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid -1.\text{ Zeile} \\ \mid -1.\text{ Zeile} \\ \mid -1.\text{ Zeile} \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & -6 & 0 & 0 & b-a \\ 0 & 9 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d-a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid :(-6) \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b-a}{6} \\ 0 & 9 & 1 & 0 & c-a \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d-a \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \\ \mid (-9)\cdot 2.\text{ Zeile} \\ \\ \end{array}$$

$$\Longleftrightarrow \left[\begin{array}{cccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 & a \\ 0 & 1 & 0 & 0 & \frac{b-a}{6} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & c-a-\frac{b-a}{6} \\ 0 & 0 & 0 & 1 & d-a \end{array}\right]$$

Dieses LGS ist offensichtlich <u>eindeutig</u> lösbar.

Da das LGS immer lösbar ist, (v_1, v_2, e_3, e_4) ein Erzeugendensystem.

Das LGS ist auch noch eindeutig lösbar, insbesondere für $w := \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, also ist (v_1, v_2, e_3, e_4) auch linear unabhängig.

<u>Resultat:</u> (v_1, v_2, e_3, e_4) ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$. ∎

Aufgabe 4 (Serie 5)

$\boxed{a}$ Seien $\lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$ ← Nullpolynom

Dann gilt

$$\lambda_1(t^3-t+1)+\lambda_2(t^3-1)+\lambda_3(t^2-t)=0$$

$$\Rightarrow (\lambda_1+\lambda_2)\cdot t^3 + (\lambda_3)t^2 + (-\lambda_1-\lambda_3)\cdot t + (\lambda_1-\lambda_2) = 0$$

Koeffizientenvergleich:

$$\Rightarrow \lambda_1+\lambda_2=0 \text{ und } \underline{\lambda_3=0} \text{ und } -\lambda_1-\lambda_3=0 \text{ und } \lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\underset{(\lambda_3=0)}{\Rightarrow} \lambda_1+\lambda_2=0 \text{ und } \lambda_3=0 \text{ und } \underline{-\lambda_1=0} \text{ und } \lambda_1-\lambda_2=0$$

$$\underset{\lambda_1=0}{\Rightarrow} \lambda_2=0 \text{ und } \lambda_3=0 \text{ und } \lambda_1=0 \text{ und } \lambda_2=0$$

$\Rightarrow \lambda_1=\lambda_2=\lambda_3=0$. Also sind p_1, p_2 und p_3 linear unabhängig. ■

$\boxed{b}$ • Wir geben zuerst eine Basis an, welche nur aus Monomen besteht: $(q_0 := 1, q_1 := t, q_2 := t^2, q_3 := t^3)$

Dies ist in der Tat eine Basis von V.

1) q_0, q_1, q_2, q_3 sind linear unabhängig, weil aus
$\lambda_0 q_0 + \lambda_1 q_1 + \lambda_2 q_2 + \lambda_3 q_3 = 0$ mittels Koeffizientenvergleich
sofort $\lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$ folgt $(\forall \lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R})$.

2) Dass $q_0, \dots, q_3$ ein Erzeugendensystem bilden ist offensichtlich.
(Jedes Polynom aus V ist von Natur aus eine Linearkombination von $q_0, \dots, q_3$).

• p_1, p_2, p_3 bilden keine Basis von V. Die Begründung werden wir ~~nach~~ während $\boxed{c}$ geben.

→

c) <u>Behauptung:</u> (q_0, p_1, p_2, p_3) ist linear unabhängig.

<u>Beweis:</u> Seien $\lambda_0, \lambda_1, \lambda_2, \lambda_3 \in \mathbb{R}$ mit $\lambda_0 q_0 + \lambda_1 p_1 + \lambda_2 p_2 + \lambda_3 p_3 = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 \cdot 1 + \lambda_1(t^3 - t + 1) + \lambda_2(t^3 - 1) + \lambda_3(t^2 - t) = 0$

$\Rightarrow (\lambda_1 + \lambda_2) \cdot t^3 + \lambda_3 \cdot t^2 + (-\lambda_1 + \lambda_3) \cdot t + (\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2) = 0$

<u>Koeffizientenvergleich</u>

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $\underline{\lambda_3 = 0}$ und $-\lambda_1 + \lambda_3 = 0$ und $\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_1 + \lambda_2 = 0$ und $\lambda_3 = 0$ und $\underline{-\lambda_1 = 0}$ und $\lambda_0 + \lambda_1 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \underline{\lambda_2 = 0}$ und $\lambda_3 = 0$ und $\lambda_1 = 0$ und $\lambda_0 - \lambda_2 = 0$

$\Rightarrow \lambda_0 = \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = 0$

$\Rightarrow (q_0, p_1, p_2, p_3)$ sind <u>linear unabhängig</u>. ∎

b) → Gemäß Serie 6, Aufgabe 2 kann also (p_1, p_2, p_3) kein maximales linear unabhängiges System gewesen sein, also <u>keine</u> <u>Basis</u>.
(~~Wir~~ ~~ich~~ Ich bin mir sicher, dass ich Aufgabe 2 / Serie 6 lösen kann, ohne Bezug auf p_1, p_2 und p_3 zu nehmen. Daher halte ich diesen Griff in die Zukunft für erlaubt).

<u>Noch zu zeigen:</u> (q_0, p_1, p_2, p_3) ist ein Erzeugendensystem.

<u>Beweis:</u>

$$\begin{aligned}
&q_0 = q_0 \quad (I)\\
&q_3 = t^3 = p_2 + q_0 \quad (II)\\
&q_1 = t = -(t^3 - t + 1) + t^3 + 1 = -p_1 + q_3 + q_0 \underset{(II)}{=} -p_1 + p_2 + q_0 + q_0\\
&\qquad = -p_1 + p_2 + 2q_0 \quad (III)\\
&q_2 = t^2 = (t^2 - t) + t = p_3 + t \underset{(III)}{=} p_3 - p_1 + p_2 + 2q_0 \quad (IV)
\end{aligned}$$

Offenbar <u>erzeugt</u> (q_0, p_1, p_2, p_3) die Vektoren q_0, q_1, q_2 und q_3, welche ein <u>Erzeugendensystem</u> sind.
Wer ein Erzeugendensystem erzeugen kann ist selbst ein Erzeugendensystem. ∎

<u>Resultat:</u> (q_0, p_1, p_2, p_3) ist eine Basis von V.