Aufgabe 1 (Serie 6)

$\boxed{a}$ „Summenzeichen": Wir schreiben „$\sum_{i=0}^{n} i^2$" für „$0^2+1^2+2^2+\ldots+n^2$".

Induktionsanfang $\boxed{n=0}$

Es gilt ~~...~~ tatsächlich: $0^2 = \frac{0\cdot(0+1)\cdot(2\cdot 0+1)}{6}$.

Induktionsschritt:

Wir nehmen an, dass $\sum_{i=0}^{n} i^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$ gilt. $(*)$

z.z. $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6}$.

Es ist: $\sum_{i=0}^{n+1} i^2 = (n+1)^2 + \sum_{i=0}^{n} i^2 \overset{(*)}{=} (n+1)^2 + \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

$$= \frac{(n+1)}{6}\cdot\left[6(n+1)+n(2n+1)\right] = \frac{(n+1)}{6}\cdot\left[6n+6+2n^2+n\right]$$

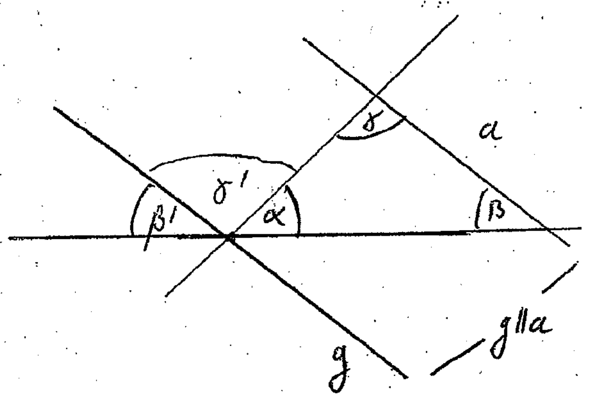
$$= \frac{(n+1)}{6}\cdot\left[2n^2+4n+3n+6\right] = \frac{(n+1)}{6}\cdot\left[(n+2)(2n+3)\right]$$

$$= \frac{(n+1)(n+2)(2(n+1)+1)}{6} \quad q.e.d$$

■

$\boxed{b}$ I-Anfang: $\boxed{n=3}$ Dass die Dreiecksinnenwinkelsumme $180°$ ist, sollte aus dem Schulunterricht bekannt sein.

Zur Erinnerung eine kleine skizze:



$g \parallel a \Rightarrow \beta' = \beta$ (Stufenwinkelsatz)

$g \parallel a \Rightarrow \gamma' = \gamma$ (Wechselwinkelsatz)

$\alpha+\beta'+\gamma' = \alpha+\beta+\gamma$

$\parallel$

$180° = (3-1)\cdot 180°$ q.e.d.

Induktionsvoraussetzung:

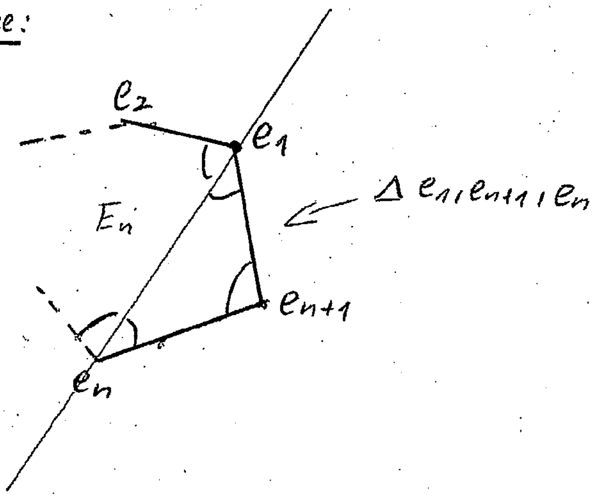
Sei ~~...~~ E_n ein beliebiges konvexes n-Eck mit den Eckpunkten $e_1, e_2, \ldots, e_n$.* Dann beträgt die Innenwinkelsumme $(n-2)\cdot 180°$.

→

Induktionsschritt:

Sei E_{n+1} ein beliebiges konvexes n-Eck mit den Ecken: $e_1, e_2, \ldots, e_{n+1}$.
Dann ist E_{n+1} zerlegbar in ein n-Eck (E_n) mit den Ecken $e_1, e_2, \ldots, e_n$ und ein ~~Dreiecke~~ Dreieck mit den Ecken e_1, e_{n+1}, e_n.

Skizze:



Die Innenwinkelsumme von E_n ist $(n-2)\cdot 180°$ (nach Voraussetzung), die von $\Delta e_1, e_{n+1}, e_n$ ist $180°$ (I-Anfang).
Also ist die von E_{n+1} gleich $(n-2)\cdot 180° + 180° = [(n+1)-2]\cdot 180°$. ∎

$\boxed{C}$

I-Anfang $\boxed{n=0}$

Es ist z.B. $3\cdot 0 + 5\cdot 0 = 0 \Rightarrow$
$$\exists x, y \in \mathbb{Z}: 3x + 5y = 0.$$

I-Voraussetzung: für ~~alle~~ n gibt es x_0 und y_0 aus $\mathbb{Z}$ mit
$$3x_0 + 5x_0 = n.$$

I-Schritt:

$$n+1 \underset{\text{I-Vor.}}{=} (3x_0 + 5y_0) + 1 = (3x_0 + 5y_0) + (3\cdot 2 - 5)$$
$$= 3(x_0+2) + 5(y_0 - 1).$$

Setze: $x := x_0 + 2$ und $y := y_0 - 1 \Rightarrow x, y \in \mathbb{Z}$ und
$$3x + 5y = n+1.$$
∎

---

* Die Ecken e_i und e_{i+1} seien benachbart für alle $i \in \{1, \ldots, n-1\}$.

Aufgabe 2 (Serie 6)

Aus der Vorlesung ist bekannt: (i) $\Rightarrow$ (ii) ~~und~~ (i) $\Rightarrow$ (iii).
Es genügt also zu zeigen: (ii) $\Rightarrow$ (i) und (iii) $\Rightarrow$ (i).
(dann ist nämlich (ii) $\Leftrightarrow$ (i) $\Leftrightarrow$ (iii).).

Beweis:

$\boxed{(ii) \Rightarrow (i)}$ Sei $\mathcal{B}$ minimales Erzeugendensystem von V. Dann ist $\mathcal{B}$ auf jeden Fall schon ein Erzeugendensystem. Ist $\mathcal{B}$ auch l.u. ?
Ja!, denn wäre $\mathcal{B}$ nicht l.u., dann würde ein j existieren, mit $1 \leq j \leq n$ und $\lambda_i \in \mathbb{R}$ (für $1 \leq i \leq n$), so dass gilt:

$b_j = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq j}}^{n} \lambda_i b_i$. Also wäre auch $\{b_1, \ldots, \hat{b_j}, \ldots, b_n\}$ ein

„ohne b_j"

Erzeugendensystem von V und zwar ein kürzeres. ↯

Fazit: $\mathcal{B}$ ist l.u. Erz.-System, also eine Basis. ∎

$\boxed{(iii) \Rightarrow (i)}$ Sei $\mathcal{B}$ maximale l.u. Teilmenge von V.

g.z.z. $\mathcal{B}$ ist Erzeugendensystem von V.

Angenommen es existiert ein $x \in V$ mit $x \notin \langle b_1, \ldots, b_n \rangle$.
$\Rightarrow \{b_1, \ldots, b_n, x\}$ ist l.u. und
$\{b_1, \ldots, b_n\} \subsetneq \{b_1, \ldots, b_n, x\}$. ↯

$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist ~~maximales linear~~ Erzeugendensystem von V.
$\Rightarrow \mathcal{B}$ ist eine Basis von V. ∎

Aufgabe 3 (Serie 6)

- U_1 ist offenbar die Lösungsmenge eines homogenen Gleichungssystems, welches schon in Zeilenstufenform vorliegt. Eine Basis können wir einfach ablesen:

$$\mathcal{B}_1 := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist Basis von } U_1.$$

- Für U_2 ist bereits ein Erzeugendensystem gegeben, da $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ kein Vielfaches von $\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}$ ist, ist dieses auch linear unabhängig.

<u>Es folgt:</u>

$$\mathcal{B}_2 := \left\{ \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\} \text{ ist eine Basis von } U_2.$$

- Offenbar ist $U_2 \not\subseteq U_1$, da z.B. für $\begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$ gilt: $1-1+1 \neq 0$.

~~und es~~ $\Rightarrow \dim(U_2 \cap U_1) < \dim U_2 = 2$.

Laut Dimensionssatz gilt:

$$5 = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_1)}_{=3} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_2)}_{=2} = \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap U_2)}_{\leq 1} + \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_1 + U_2)}_{\leq 4\text{, weil Unterraum von } \mathbb{R}^4}$$

Es folgt, dass gelten muss: $\dim(U_1+U_2) = 4$ und $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$

Aus $\dim_{\mathbb{R}}(U_1+U_2) = 4 \Rightarrow U_1 + U_2 = \mathbb{R}^4 \Rightarrow \mathcal{B}_{\text{"}1+2\text{"}} := \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$

ist eine Basis von $U_1 + U_2$.

- Wir wissen, dass $\dim(U_1 \cap U_2) = 1$. D.h. es genügt einen einzigen Vektor zu finden, welcher in $U_1 \cap U_2$ liegt ~~und~~, der nicht der Nullvektor ist, um eine Basis von $U_1 \cap U_2$ zu haben.

<u>z.B.</u> $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} = \underbrace{2 \cdot \begin{pmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ -1 \\ 2 \end{pmatrix}}_{\in U_2}$. $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix}$ ist aus U_1, da $-0-1+1=0$.

↪

daher ist $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \in U_1 \cap U_2$. Also ist

$\mathcal{B}_{„1,2"} := \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 1 \\ 6 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von $U_1 \cap U_2$.

$\blacksquare$

Aufgabe 4 (Serie 6)

$\boxed{a}$ U ist offensichtlich die Lösungsmenge des LGS:

$$\begin{aligned} \xi_1 + 2\xi_2 - \xi_3 + 2\xi_4 &= 0 \\ 3\xi_1 + 8\xi_2 + \xi_3 + 6\xi_4 &= 0 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 + 2\xi_4 &= 0 . \end{aligned}$$

Mit Hilfe des Gauß-Algorithmus können wir dies vereinfachen:

$$\begin{array}{cccc|c|l}
1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \\
3 & 8 & 1 & 6 & 0 & \mid -(3\cdot \text{I. Zeile}) \\
1 & 3 & 1 & 2 & 0 & \mid -(\text{I. Zeile}) \\
\hline
1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \\
0 & 2 & 4 & 0 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \\
\hline
1 & 2 & -1 & 2 & 0 & \mid -(2\cdot \text{II Zeile}) \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \\
0 & 2 & 4 & 0 & 0 & \mid -(2\cdot \text{II. Zeile}) \\
\hline
1 & 0 & -5 & 2 & 0 & \\
0 & 1 & 2 & 0 & 0 & \\
0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \\
\hline
\end{array}$$

Das LGS ist also äquivalent zu: $\left[\begin{aligned} \xi_1 &= 5\cdot\xi_3 - 2\xi_4 \\ \xi_2 &= -2\cdot\xi_3 \end{aligned}\right.$

Also ist $\mathcal{B} := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ eine Basis von U

und $\dim_{\mathbb{R}}(U) = 2$. ∎

$\boxed{b}$ <u>Beh:</u> $\mathcal{B}' := \left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ -2 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ist eine Basis von $\mathbb{R}^4$.

<u>Beweis:</u> Da $\dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^4 = 4$, genügt es zu zeigen, dass $\mathcal{B}'$ Erz. System.

↪

Es ~~ist~~ sind $\begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \in \langle \mathcal{B}' \rangle$, laut Definition.

Außerdem ist
$$\begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}5\\-2\\1\\0\end{pmatrix} - 5 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}$$

und
$$\begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix} + 2 \cdot \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\0\\0\\1\end{pmatrix} \in \left\langle \begin{pmatrix}5\\-2\\1\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}-2\\0\\0\\1\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}1\\0\\0\\0\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}0\\1\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle.$$

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ erzeugt ein Erzeugendensystem, ist also selbst eins.

$\Rightarrow$ $\mathcal{B}'$ ist Basis von $\mathbb{R}^4$. ∎

Aufgabe 5* (Serie 6)

$\boxed{a}$ Es seien $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}$ und $\begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}$ beliebig aus M gewählt (also $x,y,z,a,b,c \in \mathbb{R}$ und $x^2+y^2=1$ und $a^2+b^2=1$) und $\lambda \in \mathbb{R}$ beliebig.

Z.z. $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in M$ und $\lambda \nabla \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M$.

Beweis: (1) $\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}xb+ay\\ \cancel{xa+by} \\ by-xa\\ z+c\end{pmatrix}$ und es ist $xb+ay \in \mathbb{R}$, $by-xa \in \mathbb{R}$, $z+c \in \mathbb{R}$

und $(xb+ay)^2+(by-xa)^2 = x^2b^2 + \cancel{2xbay} + a^2y^2 + b^2y^2 \cancel{-2byax} + a^2x^2$

$$= \underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}x^2 + \underbrace{(a^2+b^2)}_{=1}y^2 = x^2+y^2 = 1.$$

$\Rightarrow \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in M.$ ■

(2) $\lambda \nabla \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} := \begin{pmatrix}x\\y\\\lambda z\end{pmatrix}$ und es ist $x, y, \lambda z \in \mathbb{R}$ und $x^2+y^2=1$.

$\Rightarrow \lambda \nabla \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \in M.$ ■

$\boxed{b}$ Z.z. $(M,\square)$ ist abelsche Gruppe. Zunächst: $\square$ ist assoziativ.
Seien $\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}, \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} \in M$ beliebig. Dann gilt:

$$\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \square \left[\begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix}\right] = \begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}xb+ay\\yb-ax\\z+c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha yb-\alpha ax+\beta xb+\beta ay\\ \beta yb-\beta ax-\alpha xb-\alpha ay\\ \gamma+z+c\end{pmatrix}$$

und $\|$

$$\left[\begin{pmatrix}\alpha\\\beta\\\gamma\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}x\\y\\z\end{pmatrix}\right] \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha y+\beta x\\ \beta y-\alpha x\\ \gamma+z\end{pmatrix} \square \begin{pmatrix}a\\b\\c\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\alpha yb+\beta xb+\beta ya-\alpha xa\\ \beta yb-\alpha xb-\alpha ya-\beta xa\\ \gamma+z+c\end{pmatrix}$$

Also ist $\square$ assoziativ.

<u>neutrales Element:</u> Wenn ein neutrales Element $\begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} \in M$ existiert, so muss insbesondere gelten:

$$\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} e_1 \\ e_2 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{pmatrix} e_2 + 0 \\ -e_1 \\ e_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Rightarrow e_1 = 0,\ e_2 = 1,\ e_3 = 0.$$

Und tatsächlich gilt für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + 0 \cdot y \\ y \cdot 1 - 0 \cdot x \\ z + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \cdot 1 + 0 \cdot y \\ y \cdot 1 - 0 \cdot x \\ z + 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

Also existiert in M ein neutrales Element bzgl. $\square$. Nämlich: $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ ∎

<u>inverse Elemente:</u> Sei $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ beliebig. Gesucht ist ein Element $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M$ mit $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$.

Falls $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$, so ist $\begin{pmatrix} xb + ya \\ yb - xa \\ z + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$

also $\begin{cases} bx + ay = 0 \\ -ax + by = 1 \end{cases}$ und $c = -z$.

Falls a und b ungleich 0 folgt

$$\begin{cases} bx + ay = 0 & | \cdot a \\ -ax + by = 1 & | \cdot b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx + a^2 y = 0 \\ -abx + b^2 y = b \end{cases} \xRightarrow{+} \begin{cases} abx + a^2 y = 0 \\ 0 + (a^2 + b^2) y = b \end{cases}$$

$$\underset{\text{(da } a^2+b^2=1 \text{ sein sollen)}}{\Longrightarrow} \begin{cases} abx + a^2 y = 0 \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} abx + a^2 b = 0 & | : ab \\ y = b \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x + a = 0 \\ y = b \end{cases}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} x = -a \\ y = b \end{cases}$$

Wir vermuten also, dass $\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$ ein inverses Element zu $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ sein könnte.

Und tatsächlich gilt für <u>alle</u> $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$:

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} xy - xy \\ y^2 + x^2 \\ z - z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \text{ und ebenso } \begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Zu jedem Element $\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in M$ existiert also ein inverses Element $\begin{pmatrix} -x \\ y \\ -z \end{pmatrix}$.

∎

Zunächst: Erläuterung zu „∇".
$\lambda \nabla$.. ~~verschiebt einen Punkt~~ streckt die α_3-Komponente ~~um~~ eines Punktes Q aus M um λ. ~~Q aus M um λ in~~
~~Richtung α_3~~.
Im Bild wurde $Q := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ und $Q' := 5 \nabla Q$ eingezeichnet.

Zu „$\square$": Auf der Zylindermantelfläche wird ein Punkt P eindeutig durch seine „Höhe" α_3 bestimmt und seinen Winkel φ, den er mit der ~~α_2-Ach~~ α_2-Achse bildet. „$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\varphi \\ \cos\varphi \\ z \end{pmatrix}$".

Wenn nun P einem Paar (φ_p, h_p) entspricht und P' einem Paar $(\varphi_{p'}, h_{p'})$, so ist $P \square P'$ dem Paar ~~$(\varphi_p + \varphi_{p'}, h_p)$~~ $(\varphi_p + \varphi_{p'}, h_p + h_{p'})$ zuzuordnen.

„$\square$" addiert also die Winkel φ und die Höhen h.

Dies sieht man auch rechnerisch:

$$P \square P' = \begin{pmatrix} \sin\varphi_p \\ \cos\varphi_p \\ h_p \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} \sin\varphi_{p'} \\ \cos\varphi_{p'} \\ h_{p'} \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \sin\varphi_p \cos\varphi_{p'} + \sin\varphi_{p'} \cos\varphi_p \\ \cos\varphi_p \cos\varphi_{p'} - \sin\varphi_p \sin\varphi_{p'} \\ h_p + h_{p'} \end{pmatrix}$$

$$\underset{\text{(Additionsth.)}}{=} \begin{pmatrix} \sin(\varphi_p + \varphi_{p'}) \\ \cos(\varphi_p + \varphi_{p'}) \\ h_p + h_{p'} \end{pmatrix}$$

$\blacksquare$

Kommutativität:

z.z. $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \in M: \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$.

Beweis (nachrechnen):

$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} xb + ya \\ yb - xa \\ z + c \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} ay + bx \\ by - ax \\ c + z \end{pmatrix} =: \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix} \square \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}. \quad \blacksquare$$

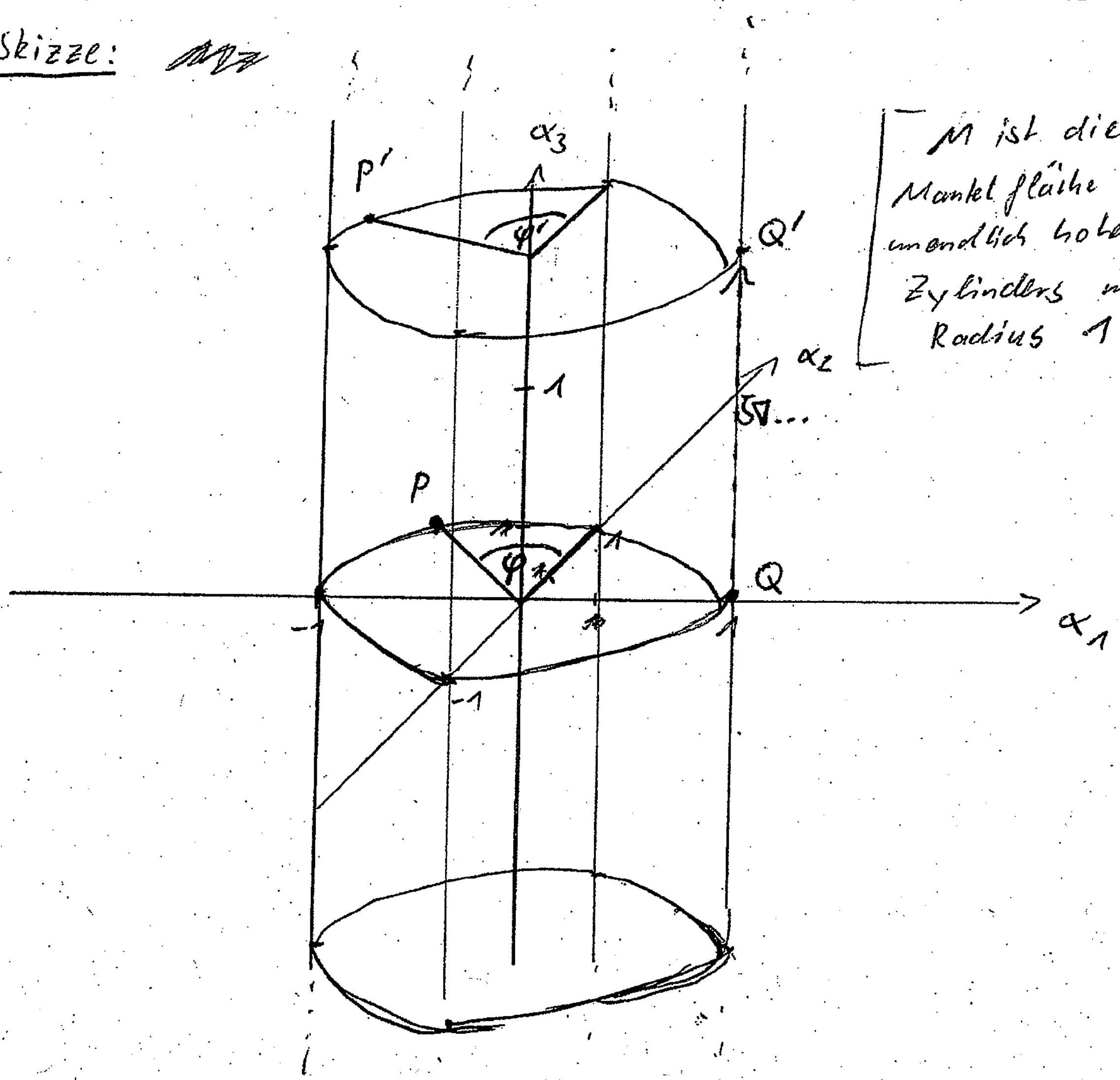
Fazit: $(M, \square)$ ist abelsche Gruppe. (Hoffentlich geht c) schneller)

$\boxed{c}$ $(M, \square, \triangledown)$ ist kein $\mathbb{R}$-Vektorraum, da z.B.

$$0 \triangledown \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} := \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Nullvektor! (und $0 \cdot \vec{v}$ sollte immer $\vec{0}$ sein). $\blacksquare$

$\boxed{d}$ Skizze:



M ist die Mantelfläche des unendlich hohen Zylinders mit Radius 1.