## Aufgabe 1(a) (Serie 7)

Sei $\mathcal{B} = \{b_1, \ldots, b_n\}$ eine geordnete Basis von $V$. Dann gilt für jedes $v \in V$: es existieren $\beta_1, \ldots, \beta_n \in \mathbb{R}$ mit $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$.

Die Koordinatenabbildung $f_{\mathcal{B}} : V \longrightarrow \mathbb{R}^n$ ist gegeben durch

$$V \ni v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j \longmapsto \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n .$$

<u>Zu zeigen</u>: $f_{\mathcal{B}}$ ist Bijektion, d.h. $f_{\mathcal{B}}$ ist injektiv und surjektiv.

<u>$f_{\mathcal{B}}$ ist injektiv</u>: Seien $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ mit $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}$. Dann gilt insbesondere

$$\circledast \quad \alpha_j = \beta_j \quad \text{für } j = 1, \ldots, n .$$

Damit folgt

$$f_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \vdots \\ \alpha_n \end{pmatrix}\right) = \sum_{j=1}^{n} \alpha_j \cdot b_j \overset{\circledast}{=} \sum_{j=1}^{n} \beta_j \cdot b_j = f_{\mathcal{B}}^{-1}\left(\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix}\right);$$

also ist $f_{\mathcal{B}}$ injektiv.

<u>$f_{\mathcal{B}}$ ist surjektiv</u>: Ist $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$ gegeben. Dann gilt für $v = \sum_{j=1}^{n} \beta_j b_j$:

$$f_{\mathcal{B}}(v) = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \vdots \\ \beta_n \end{pmatrix} .$$

$\Rightarrow f_{\mathcal{B}}$ surjektiv.

# Aufgabe 1b, Serie 7

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_1 \\ \pi & 1 & 0 & \xi_2 \\ 0 & 1 & \pi^2 & \xi_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{II}-\pi\cdot\mathrm{I}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_2-\pi\cdot\xi_1 \\ 0 & 1 & \pi^2 & \xi_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\mathrm{III}-\mathrm{II}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_2-\pi\cdot\xi_1 \\ 0 & 0 & \pi^2 & \xi_3-\xi_2+\pi\cdot\xi_1 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\frac{1}{\pi^2}\cdot\mathrm{III}]{} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & \xi_1 \\ 0 & 1 & 0 & \xi_2-\pi\cdot\xi_1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{\xi_3-\xi_2}{\pi^2}+\frac{\xi_1}{\pi} \end{array}\right)$$

Damit folgt

$$x = \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2-\pi\cdot\xi_1 \\ \frac{\xi_3-\xi_2}{\pi^2}+\frac{\xi_1}{\pi} \end{pmatrix}_B$$

Insbesondere gilt

$$v = \begin{pmatrix} 1 \\ -\pi \\ \frac{1}{\pi} \end{pmatrix}_B \quad \text{und} \quad w = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 1 \end{pmatrix}_B .$$

## Aufgabe 2 (Serie 7)

$p_0(t) = 1, \; p_1(t) = 1 - t, \; p_2(t) = 1 - 2t + t^2, \; p_3(t) = 1 - 3t + 3t^2 - t^3$

(a)

$$\begin{array}{c|cccc|c} & p_0 & p_1 & p_2 & p_3 & \\ \hline t^3 & 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_3 \\ t^2 & 0 & 0 & 1 & 3 & \alpha_2 \\ t & 0 & -1 & -2 & -3 & \alpha_1 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_0 \end{array} \longrightarrow \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 1 & 1 & 1 & \alpha_0 \\ 0 & -1 & -2 & -3 & \alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 & \alpha_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\cdot(-1)\cdot \mathrm{II}]{\cdot \mathrm{I}+\mathrm{II}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & -1 & -2 & \alpha_0+\alpha_1 \\ 0 & 1 & 2 & 3 & -\alpha_1 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{array}\right)$$

$$\xrightarrow[\cdot \mathrm{II}+(-2)\cdot \mathrm{III}]{\cdot \mathrm{I}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2 \\ 0 & 1 & 0 & -3 & -\alpha_1-2\alpha_2 \\ 0 & 0 & 1 & 3 & \alpha_2 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\mathrm{II}+3\cdot\mathrm{IV} \\ \mathrm{III}-3\cdot\mathrm{IV}}]{\cdot \mathrm{I}-\mathrm{IV}} \left(\begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 & \alpha_0+\alpha_1+\alpha_2+\alpha_3 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -\alpha_1-2\alpha_2-3\alpha_3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \alpha_2+3\alpha_3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & -\alpha_3 \end{array}\right)$$

Damit gilt

$$\lambda_1 \cdot p_0 + \lambda_2 \cdot p_1 + \lambda_3 \cdot p_2 + \lambda_4 \cdot p_3 = 0$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_1 + \lambda_2 + \lambda_3 + \lambda_4 = 0 \\ -\lambda_2 - \lambda_3 - \lambda_4 = 0 \\ \lambda_3 + 3\lambda_4 = 0 \\ -\lambda_4 = 0 \end{cases}$$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = \lambda_3 = \lambda_4 = 0 \quad \Rightarrow \quad p_0, p_1, p_2, p_3$ sind linear unabhängig

Weiter gilt für jedes Polynom $q(t) = \alpha_3 \cdot t^3 + \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 \in V$

$$q(t) = (\alpha_0 + \alpha_1 + \alpha_2 + \alpha_3) \cdot p_0(t) + (-\alpha_1 - 2\alpha_2 - 3\alpha_3) \cdot p_1(t) + (\alpha_2 + 3\alpha_3) \cdot p_2(t) + (-\alpha_3) \cdot p_3(t),$$

d.h. $\langle p_0, p_1, p_2, p_3 \rangle = V$.

(b) $q_1(t) = t^2 - t, \; q_2(t) = t^3 - 1$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow[\substack{\cdot(-1)\cdot \mathrm{III} \\ \cdot \mathrm{IV}+\mathrm{I}}]{\cdot \mathrm{II}+\mathrm{III}} \left(\begin{array}{cc|c} 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right) \longrightarrow \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Damit gilt $\lambda_1 \cdot q_1 + \lambda_2 \cdot q_2 = 0$

$\Leftrightarrow \lambda_1 = \lambda_2 = 0 \quad \Rightarrow \quad q_1, q_2$ sind linear unabhängig

(c) Mit Hilfe von (a) folgt (mit $\alpha_3 = \alpha_0 = 0$, $\alpha_2 = 1$, $\alpha_1 = -1$), dass

$$\begin{aligned} q_1 &= (0+(-1)+1+0)\cdot p_0 + (1-2+0)\cdot p_1 + (1+0)\cdot p_2 + 0\cdot p_3 \\ &= -p_1 + p_2 \quad (*) \end{aligned}$$

gilt. Damit ist (beispielsweise)

$$\tilde{\mathcal{B}} = \{p_0, q_1, p_2, p_3\}$$

eine Basis von $V$, welche durch Eintauschen von $q_1$ in $\mathcal{B}$ entstanden ist.

Mit Hilfe von (b) folgt (mit $\alpha_3 = 1$, $\alpha_2 = \alpha_1 = 0$, $\alpha_0 = -1$), dass

$$\begin{aligned} q_2 &= (-1+0+0+1)\cdot p_0 + (0+0+(-3))\cdot p_1 + (0+3)\cdot p_2 + (-1)\cdot p_3 \\ &= -3p_1 + 3p_2 - p_3 \quad (**) \\ &\overset{(*)}{=} -3(p_2 - q_1) + 3p_2 - p_3 \\ &= 3q_1 - p_3 \quad (***) \end{aligned}$$

Damit ist

$$\tilde{\tilde{\mathcal{B}}} = \{p_0, q_1, p_2, q_2\}$$

eine Basis von $V$, welche durch Eintauschen von $q_2$ in $\tilde{\mathcal{B}}$ entstanden ist.

Damit erhalten wir eine geordnete Basis der Gestalt

$$\mathcal{B}' = \{q_1, q_2, p_0, p_2\}.$$

(d)

$$q_1 \underset{\substack{\text{nach (c)} \\ (*)}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$q_2 \underset{\substack{\text{nach (c)} \\ (**)}}{=} \begin{pmatrix} 0 \\ -3 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

Außerdem gilt

$$p_0 = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad p_1 = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \underset{\substack{\text{nach (c)} \\ (*) \\ p_1 = p_2 - q_1}}{=} \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}$$

$$p_2 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}'}, \quad p_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}_{\mathcal{B}} \underset{\substack{\text{nach (c) } (***) \\ p_3 = 3q_1 - q_2}}{=} \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

## Aufgabe 3 (Serie 7)

Beweis per Induktion über $k \in \mathbb{N}$

**Induktionsanfang:** $k=1$

$U_1$ linearer Unterraum von $V$ der Dimension $n-1$

Dann gilt trivialerweise

$$\dim_{\mathbb{R}}(U_1) \geq n-1.$$

**Induktionsschritt**

Induktionsvoraussetzung (IV): Seien $U_1, \dots, U_k$ lineare Unterräume von $V$ der Dimension $n-1$ gegeben. Dann gilt: $\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap \dots \cap U_k) \geq n-k$.

Betrachte nun $U_1, \dots, U_{k+1}$ lineare Unterräume von $V$ der Dimension $n-1$.

Dann gilt

$$\begin{aligned}
\dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap \dots \cap U_k \cap U_{k+1}) &\overset{\text{Dimensionsformel}}{=} \overbrace{-\dim_{\mathbb{R}}(\underbrace{U_1 \cap \dots \cap U_k}_{\text{Unterraum!}} + U_{k+1})}^{\geq -n} + \dim_{\mathbb{R}}(U_1 \cap \dots \cap U_k) + \overbrace{\dim_{\mathbb{R}}(U_{k+1})}^{n-1} \\
&\overset{(IV)}{\geq} -n + (n-k) + (n-1) \\
&= -k + n - 1 \\
&= n - (k+1).
\end{aligned}$$

Damit ist die Induktionsbehauptung bewiesen.

**Beachte:** $U_1 \cap \dots \cap U_k$ ist für $k = 1, 2, \dots$ ein Unterraum. Dies kann/muss man auch per Induktion zeigen!

## Aufgabe 4 (Serie 7)

(a)

$$\mathbb{A}(U_1) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \lambda_1 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} + \mu_1 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\0\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1+\mu_1\\1-\mu_1\\\lambda_1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_1, \mu_1 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{A}(U_2) = \left\{ \begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\1\\0\end{pmatrix} + \mu_2 \cdot \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}\lambda_2+\mu_2\\1+\lambda_2-\mu_2\\1+\mu_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_2, \mu_2 \in \mathbb{R} \right\}$$

$$\mathbb{A}(U_3) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + \lambda_3 \cdot \begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\1+\lambda_3\end{pmatrix} \;\middle|\; \lambda_3 \in \mathbb{R} \right\}$$

**$\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2)$:**

$$\begin{aligned} 1+\mu_1 &= \lambda_2 + \mu_2 \\ 1-\mu_1 &= 1+\lambda_2-\mu_2 \\ \lambda_1 &= 1+\mu_2 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \begin{array}{cccc|c} \lambda_1 & \mu_1 & \lambda_2 & \mu_2 & \\ 0 & -1 & 1 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \end{array} \xrightarrow{\mathrm{I} \Leftrightarrow \mathrm{III}} \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 1 & +1 & 1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 \end{array}$$

$$\longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{cccc|c} 1 & 0 & 0 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & -1 & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} \end{array} \rightarrow \begin{aligned} \lambda_2 &= \tfrac{1}{2} \\ \mu_1 &= -\tfrac{1}{2} + \mu_2 \\ \lambda_1 &= 1 + \mu_2 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) = \left\{ \begin{pmatrix}\frac{1}{2}+\mu_2\\\frac{3}{2}-\mu_2\\1+\mu_2\end{pmatrix} \;\middle|\; \mu_2 \in \mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix}\frac{1}{2}\\\frac{3}{2}\\1\end{pmatrix}}_{= v_1} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}1\\-1\\1\end{pmatrix} \right\rangle}_{= W_1} = v_1 + W_1 .$$

**$\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3)$:**

$$\begin{aligned} \tfrac{1}{2} + \mu_2 &= 1 \\ \tfrac{3}{2} - \mu_2 &= 1 \\ 1 + \mu_2 &= 1 + \lambda_3 \end{aligned} \quad \Leftrightarrow \quad \lambda_3 = \mu_2 = \tfrac{1}{2}$$

$$\Rightarrow \mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3) = \left\{ \begin{pmatrix}1\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix}1\\1\\\frac{3}{2}\end{pmatrix}}_{= v_2} + \underbrace{\left\langle \begin{pmatrix}0\\0\\0\end{pmatrix} \right\rangle}_{= W_2} = v_2 + W_2$$

(b)

$$\begin{aligned} &\dim(\mathbb{A}(U_1)) = \dim_{\mathbb{R}}(U_1) = 2 \\ &\dim(\mathbb{A}(U_2)) = \dim_{\mathbb{R}}(U_2) = 2 \\ &\dim(\mathbb{A}(U_3)) = \dim_{\mathbb{R}}(U_3) = 1 \\ &\dim(\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2)) = \dim_{\mathbb{R}}(W_1) = 1 \\ &\dim(\mathbb{A}(U_1) \cap \mathbb{A}(U_2) \cap \mathbb{A}(U_3)) = \dim_{\mathbb{R}}(W_2) = 0 . \end{aligned}$$

(c) $\mathbb{A}(\mathcal{U}_1)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1+\mu_1 \\ \xi_2 &= 1-\mu_1 \\ \xi_3 &= \lambda_1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\boxed{\xi_1+\xi_2 = 2} \\ &\xi_3 = \lambda_1 \end{aligned}$$

$\mathbb{A}(\mathcal{U}_2)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\begin{aligned} \xi_1 &= \lambda_2+\mu_2 \\ \xi_2 &= 1+\lambda_2-\mu_2 \\ \xi_3 &= 1+\mu_2 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} \xi_1-\mu_2 &= \xi_2+\mu_2-1 \\ \mu_2 &= \xi_3-1 \end{aligned} \quad \rightarrow \quad \begin{aligned} &\xi_1-\xi_3+1 = \xi_2+\xi_3-2 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\xi_1-\xi_2-2\xi_3 = -3} \end{aligned}$$

$\mathbb{A}(\mathcal{U}_3)$ ist Lösungsmenge des linearen Gleichungssystems:

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \\ \xi_2 &= 1 \end{aligned}}$$
$$\xi_3 = 1+\lambda_3$$

Damit folgt: (i) Das lineare Gleichungssystem

$$\boxed{\begin{aligned} \xi_1+\xi_2 &= 2 \\ \xi_1-\xi_2-2\xi_3 &= -3 \end{aligned}}$$

hat die Lösungsmenge $\mathbb{A}(\mathcal{U}_1)\cap\mathbb{A}(\mathcal{U}_2)$.

<u>Probe</u>

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \rightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{5}{2} \end{array} \Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} -\frac{1}{2}+\lambda \\ \frac{5}{2}-\lambda \\ \lambda \end{pmatrix} \,\middle|\, \lambda\in\mathbb{R} \right\} = \underbrace{\begin{pmatrix} -\frac{1}{2} \\ \frac{5}{2} \\ 0 \end{pmatrix}}_{\tilde{v}_1} + \left\langle \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle = \tilde{v}_1 + W_1$$

und es gilt $\tilde{v}_1 + W_1 = v_1 + W_1$, da

$$v_1 - \tilde{v}_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \in W_1.$$

(ii) Das lineare Gleichungssystem

$$\begin{aligned} \xi_1 &= 1 \\ \xi_2 &= 1 \\ \xi_1-\xi_2-2\xi_3 &= -3 \end{aligned}$$

hat die Lösungsmenge $\mathbb{A}(\mathcal{U}_1)\cap\mathbb{A}(\mathcal{U}_2)\cap\mathbb{A}(\mathcal{U}_3)$.

<u>Probe</u>

$$\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & -2 & -3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & -1 & -2 & -4 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & -2 & -3 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & \frac{3}{2} \end{array} \Rightarrow L = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ \frac{3}{2} \end{pmatrix} \right\} = v_2 + W_2.$$