Aufgabe 3 (Serie 8)

(a) $f: \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2$, $f\left(\begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix}$

Nach Definition des Kerns, bzw. des Bildes einer linearen Abbildung gilt

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \xi_1 \\ \xi_2 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \;\middle|\; \begin{pmatrix} \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 \\ \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\} \subseteq \mathbb{R}^3,$$

$$\operatorname{Im}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; \exists\, \xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R} \text{ mit } \xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = \alpha_1 \text{ und } \xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 = \alpha_2 \right\} \subseteq \mathbb{R}^2.$$

Berechne nun mit Hilfe des Gauß-Algorithmus

$$\begin{array}{ccc|c} \xi_1 & \xi_2 & \xi_3 & \\ 1 & 1 & -1 & \alpha_1 \\ 1 & 3 & 1 & \alpha_2 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \alpha_1 \\ 0 & 2 & 2 & \alpha_2 - \alpha_1 \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & -1 & \alpha_1 \\ 0 & 1 & 1 & \frac{\alpha_2 - \alpha_1}{2} \end{array} \longrightarrow \begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -2 & \frac{3\alpha_1 - \alpha_2}{2} \\ 0 & 1 & 1 & \frac{-\alpha_1 + \alpha_2}{2} \end{array}$$

$$\Rightarrow (\circledast) \begin{cases} \xi_1 = \frac{3\alpha_1 - \alpha_2}{2} + 2\xi_3 \\ \xi_2 = \frac{-\alpha_1 + \alpha_2}{2} - \xi_3 \\ \xi_3 \in \mathbb{R} \text{ beliebig (Freiheitsgrad!)} \end{cases}$$

Für $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$, folgert man nun sofort

$$\ker(f) = \left\{ \begin{pmatrix} 2\xi_3 \\ -\xi_3 \\ \xi_3 \end{pmatrix} \;\middle|\; \xi_3 \in \mathbb{R} \right\} = \left\langle \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix} \right\rangle$$ und damit $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 1$.

(Basis vom $\ker(f)$ ist $\left\{ \begin{pmatrix} -2 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$.)

Weiter gilt, da für jeden Vektor $\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ reelle Zahlen $\xi_1, \xi_2, \xi_3 \in \mathbb{R}$ existieren mit $\xi_1 + \xi_2 - \xi_3 = \alpha_1$ und $\xi_1 + 3\xi_2 + \xi_3 = \alpha_2$ (siehe $\circledast$), dass

$\operatorname{Im}(f) = \mathbb{R}^2$ und damit $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 2$ (Basis von $\mathbb{R}^2$ ist $\left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$.)

Damit folgt $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) + \dim_{\mathbb{R}} \operatorname{Im}(f) = 1 + 2 = 3 \overset{!}{=} \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$, was die Dimensionsformel für den Kern und das Bild einer linearen Abbildung bestätigt.

(b) $f : P_3 \longrightarrow P_3$, $f(p(t)) = p'(t)$

Nach Definition des Kerns, bzw. des Bildes einer linearen Abbildung gilt

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ p(t) \in P_3 \mid p'(t) = 0 \} \subseteq P_3,$$

$$\mathrm{Im}(f) = \{ q(t) \in P_3 \mid \exists p(t) \in P_3 \text{ mit } p'(t) = q(t) \} \subset P_3 .$$

Sei nun $p(t) \in P_3$, d.h. es existieren $\alpha_0, \alpha_1, \alpha_2, \alpha_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$p(t) = \alpha_3 \cdot t^3 + \alpha_2 \cdot t^2 + \alpha_1 \cdot t + \alpha_0 .$$

Dann gilt

$$p'(t) = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad 3 \cdot \alpha_3 \cdot t^2 + 2 \cdot \alpha_2 \cdot t + \alpha_1 = 0$$

$$\underset{\text{Koeffizientenvergleich}}{\Longleftrightarrow} \quad 3\alpha_3 = 0 \wedge 2\alpha_2 = 0 \wedge \alpha_1 = 0$$

$$\Longleftrightarrow \quad \alpha_3 = \alpha_2 = \alpha_1 = 0 .$$

Damit folgt sofort

$$\mathrm{Ker}(f) = \{ p(t) \in P_3 \mid p(t) = \alpha_0 \text{ für ein } \alpha_0 \in \mathbb{R} \} = \langle 1 \rangle \text{, d.h.}$$

$\{1\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Ker}(f)$ und $\dim_{\mathbb{R}} \ker(f) = 1$.

(Bemerkung: Der Kern von f besteht also aus den „konstanten" Polynomen.)

Sei nun $q(t) \in P_3$, d.h. es existieren $\beta_0, \beta_1, \beta_2, \beta_3 \in \mathbb{R}$ mit

$$q(t) = \beta_3 \cdot t^3 + \beta_2 t^2 + \beta_1 \cdot t + \beta_0 .$$

Für das Polynom $p(t) := \frac{1}{4} \cdot \beta_3 \cdot t^4 + \frac{1}{3} \cdot \beta_2 \cdot t^3 + \frac{1}{2} \cdot \beta_1 \cdot t^2 + \beta_0 \cdot t + \alpha_0$, wobei $\alpha_0 \in \mathbb{R}$ beliebig ist, gilt

$$p'(t) = 4 \cdot \frac{1}{4} \cdot \beta_3 \cdot t^3 + 3 \cdot \frac{1}{3} \cdot \beta_2 \cdot t^2 + 2 \cdot \frac{1}{2} \cdot \beta_1 \cdot t + \beta_0 = q(t) .$$

Nun gilt aber

$$p(t) \in P_3 \Longleftrightarrow \beta_3 = 0 .$$

Damit folgt

$$\mathrm{Im}(f) = \{ q(t) \in P_3 \mid q(t) \text{ hat Grad } \leq 2 \text{, d.h. } q(t) = \beta_2 \cdot t^2 + \beta_1 \cdot t + \beta_0 \text{ für gewisse } \beta_0, \beta_1, \beta_2 \in \mathbb{R} \}$$

$$= \langle t^2, t, 1 \rangle \text{, d.h.}$$

$\{t^2, t, 1\}$ ist eine Basis von $\mathrm{Im}(f)$ und $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 3$

Insgesamt folgt damit $\dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Ker}(f) + \dim_{\mathbb{R}} \mathrm{Im}(f) = 1 + 3 = 4 \overset{!}{=} \dim_{\mathbb{R}} P_3$,

was wiederum die Dimensionsformel für den Kern und das Bild einer linearen Abbildung bestätigt.

Aufgabe 4 (Serie 8)

(a) Zuerst berechnen wir mit dem Gauß-Algorithmus für beliebige $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$

$$\left(\begin{array}{cc|c} 5 & 2 & \alpha_1 \\ 3 & 1 & \alpha_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & 2\alpha_2 - \alpha_1 \\ 3 & 1 & \alpha_2 \end{array}\right) \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & -\alpha_1 + 2\alpha_2 \\ 0 & 1 & 3\alpha_1 - 5\alpha_2 \end{array}\right)$$

Damit gilt

$$(*) \quad \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} = (-\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + (3\alpha_1 - 5\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix},$$

was beweist, dass $\left\{ \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right\}$ ein Erzeugendensystem des $\mathbb{R}^2$ bilden und (setze $\alpha_1 = \alpha_2 = 0$) dass $\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ linear unabhängig sind.

Da $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ eine <u>lineare</u> Abbildung ist, gilt

$$f\left(\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix}\right) \overset{(*)}{=} f\left((-\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix} + (3\alpha_1 - 5\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix} \right)$$

$$\overset{f \text{ linear}}{=} (-\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) + (3\alpha_1 - 5\alpha_2) \cdot f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right)$$

$$\overset{\substack{\text{geforderte} \\ \text{Eigenschaft} \\ \text{von } f}}{=} (-\alpha_1 + 2\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix} + (3\alpha_1 - 5\alpha_2) \cdot \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4\alpha_1 + 8\alpha_2 - 9\alpha_1 + 15\alpha_2 \\ -17\alpha_1 + 34\alpha_2 + 24\alpha_1 - 40\alpha_2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -13\alpha_1 + 23\alpha_2 \\ 7\alpha_1 - 6\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Die lineare Abbildung $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ mit der Eigenschaft

$$f\left(\begin{pmatrix} 5 \\ 3 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} 4 \\ 17 \end{pmatrix}, \quad f\left(\begin{pmatrix} 2 \\ 1 \end{pmatrix}\right) = \begin{pmatrix} -3 \\ 8 \end{pmatrix}$$

ist also wie folgt gegeben

$$f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$$
$$\begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \longmapsto \begin{pmatrix} -13\alpha_1 + 23\alpha_2 \\ 7\alpha_1 - 6\alpha_2 \end{pmatrix}.$$

Satz über lineare Fortsetzung!

Per Konstruktion ist f linear. Weiter gilt

Nebenrechnung mit $\beta_1 = \beta_2 = 0$

$$\operatorname{Ker}(f) = \left\{ \begin{pmatrix} \alpha_1 \\ \alpha_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2 \;\middle|\; -13\alpha_1 + 23\alpha_2 = 0 \text{ und } 7\alpha_1 - 6\alpha_2 = 0 \right\} = \left\{ \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$$

und damit folgt, dass f injektiv ist.

Weiter gilt für $\begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ beliebig, dass reelle Zahlen $\alpha_1, \alpha_2 \in \mathbb{R}$ existieren mit

$$\begin{pmatrix} -13\alpha_1 + 23\alpha_2 \\ 7\alpha_1 - 6\alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \beta_1 \\ \beta_2 \end{pmatrix},$$

nämlich (siehe Nebenrechnung): $\alpha_1 = \frac{1}{83} \cdot (6\beta_1 + 23\beta_2)$ und $\alpha_2 = \frac{1}{83}(7\beta_1 + 13\beta_2)$.

Damit folgt dass f surjektiv ist.

[Nebenrechnung
$$\left(\begin{array}{cc|c} -13 & 23 & \beta_1 \\ 7 & -6 & \beta_2 \end{array}\right) \xrightarrow{\text{Gauß-Alg.}} \cdots \to \left(\begin{array}{cc|c} 1 & 0 & \frac{1}{83}(6\beta_1 + 23\beta_2) \\ 0 & 1 & \frac{1}{83}(7\beta_1 + 13\beta_2) \end{array}\right)$$
]

Da f linear, injektiv und bijektiv ist, ist f ein Isomorphismus.

(b) Da es nach dem Satz über die lineare Fortsetzung genügt, die Werte einer linearen Abbildung auf den Basisvektoren zu kennen, bestimmen wir zunächst eine Basis von $\mathbb{R}^3$:
Wir wählen als Basis des $\mathbb{R}^3$ die Standardbasis $\left\{\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right\}$

und wir definieren

$$f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right) := \begin{pmatrix}0\\0\\0\\0\end{pmatrix}.$$

Wir setzen f linear fort: Sei $\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3$ beliebig. Dann gilt

$$f\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\right) \overset{f \text{ linear}}{=} \alpha_1\cdot f\left(\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}\right)+\alpha_2\cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}\right)+\alpha_3\cdot f\left(\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}\right)$$

$$(*) \qquad = \alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2\\2\alpha_1\\-\alpha_2\\-4\alpha_1-3\alpha_2\end{pmatrix}.$$

Weiter gilt

$$\mathrm{Im}(f) = \left\{\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists \begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ mit } f\left(\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\right)=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}\right\}$$

$$\overset{(*)}{=} \left\{\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^4 \;\middle|\; \exists\, \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R} \text{ mit } \alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\beta_1\\\beta_2\\\beta_3\\\beta_4\end{pmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\alpha_1\cdot\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix}+\alpha_2\cdot\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix} \;\middle|\; \alpha_1,\alpha_2\in\mathbb{R}\right\}$$

$$= \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\rangle.$$

Damit haben wir insgesamt gezeigt, dass die lineare Abbildung

$$f:\mathbb{R}^3\longrightarrow\mathbb{R}^4$$
$$\begin{pmatrix}\alpha_1\\\alpha_2\\\alpha_3\end{pmatrix}\longmapsto\begin{pmatrix}\alpha_1+2\alpha_2\\2\alpha_1\\-\alpha_2\\-4\alpha_1-3\alpha_2\end{pmatrix}$$

die Eigenschaft $\quad \mathrm{Im}(f) = \left\langle\begin{pmatrix}1\\2\\0\\-4\end{pmatrix},\begin{pmatrix}2\\0\\-1\\-3\end{pmatrix}\right\rangle$

besitzt.