Aufgabe 1 – Serie 9

$\boxed{a}$ Es ist zu zeigen, dass $\operatorname{im} f = \{v \in V \mid \exists u \in U: f(u) = v\}$ ein linearer Unterraum ~~Ve~~. von V ist.

Beweis:

- $\operatorname{im} f \neq \emptyset$, da $0_V \in \operatorname{im} f$, weil ja $0_V = f(0_U)$.
- Es seien $v_1, v_2 \in \operatorname{im} f$. z.z. $v_1 + v_2 \in \operatorname{im} f$.
  $(\Leftrightarrow \exists u \in U: f(u) = v_1 + v_2)$.

$v_1 \in \operatorname{im} f \Rightarrow \exists u_1 \in U: f(u_1) = v_1$.
Analog folgt aus $v_2 \in \operatorname{im} f$, dass es ein $u_2 \in U$ gibt, so dass $f(u_2) = v_2$ ist.
Berechne $f(u_1 + u_2)$: $f(u_1 + u_2) = f(u_1) + f(u_2) = v_1 + v_2$.

$\Rightarrow v_1 + v_2 \in \operatorname{im} f$.

- Sei $\lambda \in \mathbb{R}$ und $v \in \operatorname{im} f$.
  $\Rightarrow \exists u \in U: f(u) = v \Rightarrow f(\lambda u) = \lambda \cdot f(u) = \lambda v$.
  $\Rightarrow \lambda v \in \operatorname{im} f$.

Also ist $\operatorname{im} f$ ein linearer Unterraum von V.

$\boxed{b}$ (1) Wir zeigen zunächst: $\forall u_1, u_2 \in U: (g \circ f)(u_1 + u_2) = (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2)$.

Beweis:

Seien $u_1, u_2 \in U$ beliebig.
Dann gilt: $(g \circ f)(u_1 + u_2) = g(f(u_1 + u_2)) \overset{f \text{ linear}}{=} g(f(u_1) + f(u_2))$

$\overset{g \text{ linear}}{=} g(f(u_1)) + g(f(u_2)) = (g \circ f)(u_1) + (g \circ f)(u_2)$. $\blacksquare$

(2) Wir zeigen nun: $\forall \lambda \in \mathbb{R}, \forall u \in U: (g \circ f)(\lambda u) = \lambda \cdot (g \circ f)(u)$.

Beweis:

$$(g \circ f)(\lambda u) = g(f(\lambda u)) \underset{f \text{ linear}}{=} g(\lambda f(u)) \underset{g \text{ linear}}{=} \lambda \cdot g(f(u))$$

$$= \lambda \cdot (g \circ f)(u). \qquad \blacksquare$$

Aus (1) und (2) folgt, dass $g \circ f$ linear ist.

Aufgabe 2

$\boxed{a}$ Es sei $A := \{(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \mid (a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ist arithmetisch$\}$.

Ferner sei $\oplus : A \times A \longrightarrow A$
$$((a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto (a_n + b_n)_{n\in\mathbb{N}}$$

und $\odot : \mathbb{R} \times A \longrightarrow A$
$$(\lambda, (a_n)_{n\in\mathbb{N}}) \longmapsto (\lambda \cdot a_n)_{n\in\mathbb{N}}.$$

Zu zeigen ist, dass $(A, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum ist.

Frage: Sind $\oplus$ und $\odot$ überhaupt wohldefiniert?

Antwort: Ja! (welch Glück!)

Beweis: Seien $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}, (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$

$$\Rightarrow \exists d_a, d_b \; \forall j \in \mathbb{N}: \; a_{j+1} - a_j = d_a \wedge b_{j+1} - b_j = d_b.$$

$$\Rightarrow ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}})_{j+1} - ((a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}})_j$$

$$= (a_{j+1} + b_{j+1}) - (a_j + b_j) = a_{j+1} - a_j + b_{j+1} - b_j$$

$$= d_a + d_b \quad \text{für alle } j \in \mathbb{N}.$$

$$\Rightarrow (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (b_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A.$$

Analog gilt für alle $\lambda \in \mathbb{R}$, $\forall j \in \mathbb{N}$:

$$(\lambda \odot (a_n)_{n\in\mathbb{N}})_{j+1} - (\lambda \odot (a_n)_{n\in\mathbb{N}})_j$$

$$= \lambda \cdot a_{j+1} - \lambda a_j = \lambda (a_{j+1} - a_j) = \lambda \cdot d_a. \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \lambda \odot (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A.$$

Also sind $\odot$ und $\oplus$ wohldefiniert.

$\hookrightarrow$

Ist nun $(A, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum?

Prüfe die Vektorraumaxiome:

1) $\oplus$ ist assoziativ, denn seien $a, b, c \in A$ beliebig

$\Rightarrow \forall n \in \mathbb{N}: a_n + (b_n + c_n) = (a_n + b_n) + c_n$

$\Rightarrow a \oplus (b \oplus c) = (a \oplus b) + c$.

2) Es gibt ein neutrales Element bzgl. $\oplus$ in A, weil die konstante Nullfolge eine arithmetische Folge ist. Es ist nämlich $0_{j+1} - 0_j = 0$ für alle $j \in \mathbb{N}$.

3) Sei $(a_n)_{n \in \mathbb{N}} \in A$ mit $a_{j+1} - a_j = d$ $\forall j \in \mathbb{N}$.

$\Rightarrow$ Die Folge $(-a_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ist aus A, wobei $(-a_{j+1}) - (-a_j) = -d$ für alle $j \in \mathbb{N}$ gilt.

$\Rightarrow$ Es existieren Inverse Elemente.

4) Seien $a, b \in A$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$: $a_n + b_n = b_n + a_n$

$\Rightarrow a \oplus b = b \oplus a$.

$\oplus$ ist also kommutativ.

5) Es seien $a, b \in A$ und $\lambda \in \mathbb{R}$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$\lambda \cdot (a_n + b_n) = \lambda \cdot a_n + \lambda \cdot b_n$

$\Rightarrow \lambda \odot (a \oplus b) = (\lambda \odot a) \oplus \lambda \odot b$. $(\forall \lambda \in \mathbb{R}, (a, b) \in A^2)$

6) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a \in A$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$(\lambda + \mu) \cdot a_n = \lambda \cdot a_n + \mu \cdot a_n \Rightarrow (\lambda + \mu) \odot a = (\lambda \odot a) \oplus (\mu \odot a)$

7) Seien $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, $a \in A$. Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$:

$(\lambda \cdot \mu) \cdot a_n = \lambda \cdot (\mu \cdot a_n) \Rightarrow (\lambda \cdot \mu) \odot a_n = \lambda \odot (\mu \odot a_n)$.

Folglich ist $(A, \oplus, \odot)$ ein $\mathbb{R}$-Vektorraum. ∎

$\boxed{b}$ Wir definieren $f: \mathbb{R}^2 \longrightarrow A$

$$\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \longmapsto (a_n)_{n\in\mathbb{N}} \text{ mit } a_n := x + n\cdot y \text{ für alle } n\in\mathbb{N}.$$

- f ist wohldefiniert, denn die Folge $(x+ny)_{n\in\mathbb{N}}$ ist eine arithmetische Folge, weil ja für alle $j\in\mathbb{N}$ gilt:

$$(x+ny)_{j+1} - (x+ny)_j = x+(j+1)y - x + jy$$
$$= y.$$

- f ist eine lineare Abbildung, da $\forall \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ gilt:

$$f\left(\begin{pmatrix} x+a \\ y+b \end{pmatrix}\right) = \big((x+a) + n(y+b)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \big((x+ny) + (a+nb)\big)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= (x+ny)_{n\in\mathbb{N}} \oplus (a+nb)_{n\in\mathbb{N}} = f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) \oplus f\left(\begin{pmatrix} a \\ b \end{pmatrix}\right)$$

und für alle $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ und alle $\lambda \in \mathbb{R}$:

$$f\left(\begin{pmatrix} \lambda x \\ \lambda y \end{pmatrix}\right) = (\lambda x + n\lambda y)_{n\in\mathbb{N}} = \big(\lambda\cdot(x+ny)\big)_{n\in\mathbb{N}} = \lambda \odot (x+ny)_{n\in\mathbb{N}}$$
$$= \lambda \odot f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right).$$

- f ist auch injektiv. Denn sei $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ mit $f\left(\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right) = (0)_{n\in\mathbb{N}}$

$$\Rightarrow x + ny = 0 \ (\forall n\in\mathbb{N}) \Rightarrow \begin{cases} x = 0 & \text{mit } n=0 \\ x+y=0 & \text{mit } n=1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow x = 0 \wedge y = 0 \Rightarrow \ker f = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\} \Rightarrow f \text{ injektiv.}$$

- f ist auch surjektiv. Denn sei $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} \in A$ beliebig mit $a_1 - a_0 = d$. Dann ist $(a_n)_{n\in\mathbb{N}} = f\left(\begin{pmatrix} a_0 \\ d \end{pmatrix}\right)$.

$\Rightarrow f$ ist ein <u>Isomorphismus</u> $\Rightarrow A$ und $\mathbb{R}^2$ sind isomorph. ■

Aufgabe 3

Wir berechnen zunächst den Kern von f.

Für ein Element $\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ gilt:

$$\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} \in \ker f \Leftrightarrow f\left(\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}\right) = 0 \Leftrightarrow \begin{pmatrix} 5 J_2 \\ -2 J_1 + J_2 + 2 J_3 \\ J_1 + J_2 + J_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$\Leftrightarrow$ J ist aus der Lösungsmenge des LGS: $\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 5 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$

Die Lösungsmenge dieses LGS berechnen wir mit Hilfe des Gauß-Algorithmus:

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 3 & 0 & 0 \\ -2 & 1 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \mid :5 \\ \mid +2\cdot \text{III Zeile} \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right] \begin{array}{l} \\ \mid -3\cdot \text{I Zeile} \\ \end{array} \longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right]$$

$$\longrightarrow \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right]$$

$\Rightarrow$ Die Lösungsmenge des LGS ist ein-elementig $\Rightarrow$ Die Lösungsmenge ist $\{0\}$.

- Also ist $\ker(f) = \{0\}$.
- Wegen $\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f) = \dim_{\mathbb{R}} \mathbb{R}^3$ (siehe Aufgabe 4 Erinnerung) folgt sofort $\dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f) = 3 \Rightarrow \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$
- $\ker f + \operatorname{im} f \supseteq \operatorname{im} f = \mathbb{R}^3 \Rightarrow \ker(f) + \operatorname{im}(f) = \mathbb{R}^3$.
- $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$.
- Aus $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$ folgt mit Aufgabe 4: $\ker(f \circ f) = \ker f = \{0\}$.

Nun geben wir noch $f \circ f$ explizit an:

Sei $\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ beliebig.

Dann gilt:

$$(f \circ f)\left(\begin{pmatrix} J_1 \\ J_2 \\ J_3 \end{pmatrix}\right) = f\left(\begin{pmatrix} 5J_2 \\ -2J_1 + J_2 + 2J_3 \\ J_1 + J_2 + J_3 \end{pmatrix}\right)$$

$$= \begin{pmatrix} 5 \cdot (-2J_1 + J_2 + 2J_3) \\ -2 \cdot (5J_2) + (-2J_1 + J_2 + 2J_3) + 2(J_1 + J_2 + J_3) \\ 5J_2 + (-2J_1 + J_2 + 2J_3) + J_1 + J_2 + J_3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -10J_1 + 5J_2 + 10J_3 \\ -7J_2 + 4J_3 \\ 4J_1 + 7J_2 + 3J_3 \end{pmatrix}.$$

$\blacksquare$

Aufgabe 4

Erinnerung: Für alle ~~allen~~ endlich erzeugten reellen Vektorräume V und W und für jede lineare Abbildung $f: V \to W$ gilt stets: $\dim_{\mathbb{R}}(V) = \dim_{\mathbb{R}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f)$.

Zu zeigen ist, dass die folgenden Bedingungen äquivalent sind:

(i) $\ker f + \operatorname{im} f = V$

(ii) $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$

(iii) $\ker(f \circ f) = \ker(f)$.

Beweis:

$\boxed{(i) \Leftrightarrow (ii)}$

$$\ker f + \operatorname{im} f = V$$
$$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker f + \operatorname{im} f) = \dim_{\mathbb{R}} V$$
$$\Leftrightarrow \underbrace{\dim_{\mathbb{R}}(\ker f) + \dim_{\mathbb{R}}(\operatorname{im} f)}_{= n \text{ (siehe Erinnerung)}} - \dim_{\mathbb{R}}(\ker f \cap \operatorname{im} f) = n$$
$$\Leftrightarrow \dim_{\mathbb{R}}(\ker f \cap \operatorname{im} f) = 0$$
$$\Leftrightarrow \cancel{\dim_{\mathbb{R}}} \ \ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}. \quad \blacksquare$$

$\boxed{(ii) \Rightarrow (iii)}$ Klar ist, dass $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$, da aus $f(x) = 0$ ~~folgt~~ stets $f(f(x)) = 0$ folgt, für alle $x \in V$.

Es ist also zu zeigen $\ker(f \circ f) \subseteq \ker f$.

Sei $x \in \ker(f \circ f)$ beliebig. $\Rightarrow f(f(x)) = 0$

$\Rightarrow f(x) \in \ker f$ (und $f(x) \in \operatorname{im} f$).

$\Rightarrow f(x) \in \ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\} \Rightarrow f(x) = 0$

$\Rightarrow x \in \ker f$. Fazit: $\ker f \subseteq \ker(f \circ f)$

$\Rightarrow \ker f = \ker(f \circ f)$ $\blacksquare$

$\boxed{(iii) \Rightarrow (ii)}$

Es sei $x \in \ker f \cap \operatorname{im} f$

$\Rightarrow f(x) = 0$ und $\exists y \in V: f(y) = x$.

$\Rightarrow f(f(y)) = f(x) = 0$

$\Rightarrow y \in \ker(f \circ f) = \ker f \Rightarrow y \in \ker f$

$\Rightarrow f(y) = 0 \Rightarrow x = f(y) = 0$

Also ist $\ker f \cap \operatorname{im} f = \{0\}$. ∎