Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 4

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 10: Zeigen Sie:

a) $|x+y|+|x-y| \geq |x|+|y|$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

b) $\frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|}$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

c) Für welche reellen Zahlen $x \neq 3$ gilt $\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{1+|x-1|}$? (Beweisen Sie Ihre Aussage).

Lösung:

Zu a) Mithilfe der Dreiecksgleichung sieht man, dass

$$\begin{aligned}2|x| &= |2x| = |(x+y)+(x-y)| \leq |x+y|+|x-y| \\ 2|y| &= |2y| = |(x+y)+(y-x)| \leq |x+y|+|y-x| = |x+y|+|x-y|.\end{aligned}$$

Addiert man die beiden Ungleichungen, so erhält man

$$2|x|+2|y| \quad \leq \quad 2(|x+y|+|x-y|).$$

Dividiert man diese Ungleichung durch zwei, so erhält man gerade die behauptete Ungleichung. $\square$

Kommt man nicht auf diese Idee, so kann man auch mit einer Fallunterscheidung arbeiten:

1. Fall: $x, y \geq 0$.
OBdA sei $x \geq y$, sonst vertauschen wir die Variablen, da $|x-y| = |y-x|$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|x+y|+|x-y| &= x+y+x-y \\ &= 2x \\ &\geq x+y \\ &= |x|+|y|\end{aligned}$$

2. Fall: $x, y < 0$.
Wir setzen $a := -x, b := -y$. D.h. $a, b > 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned}|x+y|+|x-y| &= |-a-b|+|-a+b| \\ &= |a+b|+|b-a| \\ &\overset{Fall 1}{\geq} |a|+|b| \\ &= |x|+|y|\end{aligned}$$

3. Fall: $x < 0 \leq y$.
Wir setzen $a := -x$ und erhalten wie oben mit Hilfe von Fall 1 die Behauptung.

4. Fall: $y < 0 \leq x$.
Wir setzen $b := -y$ und erhalten wie oben mit Hilfe von Fall 1 die Behauptung. $\square$

Zu b) Wir beseitigen zunächst die Brüche. Der Hauptnenner ist positiv, wir können also mit ihm multplizieren und erhalten die äquivalente Ungleichung

$$\begin{aligned}
& \frac{|x+y|}{1+|x+y|} \leq \frac{|x|}{1+|x|} + \frac{|y|}{1+|y|} = \frac{|x|(1+|y|)+|y|(1+|x|)}{(1+|x|)\cdot(1+|y|)} \\
\iff \quad & (1+|x|)(1+|y|)|x+y| \leq |x|(1+|y|)(1+|x+y|) + |y|(1+|x|)(1+|x+y|) \\
\iff \quad & |x+y| + |x|\cdot|x+y| + |y|\cdot|x+y| + |xy|\cdot|x+y| \\
& \quad \leq (|x| + |xy| + |x|\cdot|x+y| + |xy|\cdot|x+y|) + (|y| + |xy| + |y|\cdot|x+y| + |xy|\cdot|x+y|) \\
\iff \quad & |x+y| \leq |x| + |y| + 2|xy| + |xy|\cdot|x+y|.
\end{aligned}$$

Die letzte Ungleichung ist aber wahr, da $|x+y| \leq |x| + |y|$ und $0 \leq 2|xy| + |xy|\cdot|x+y|$.
$\square$

Zu c) Es sei $x \in \mathbb{R} \setminus \{3\}$. In diesem Fall ist die zu untersuchende Ungleichung

$$\frac{1}{|x-3|} > \frac{1}{1+|x-1|} \qquad (*)$$

äquivalent zur Ungleichung

$$1 + |x-1| > |x-3|. \qquad (**)$$

Wir untersuchen die Gültigkeit der Ungleichung $(**)$ in den drei möglichen Fällen: $x < 1$, $1 \leq x < 3$ und $3 < x$.

1. Fall: $x < 1$. Dann gilt:

$$1 + |x-1| = 1 - (x-1) = 2 - x \overset{(**)}{>} |x-3| = -(x-3) = 3 - x \iff 2 > 3.$$

D.h. in diesem Fall gibt es keine Lösung der Ungleichung $(**)$.

2. Fall: $1 \leq x < 3$. Dann gilt:

$$1 + |x-1| = 1 + (x-1) = x \overset{(**)}{>} |x-3| = -(x-3) = 3 - x \iff 2x > 3 \iff x > \frac{3}{2}.$$

In diesem Fall ist die Ungleichung $(**)$ also genau dann erfüllt, wenn $\frac{3}{2} < x < 3$.

3. Fall: $3 < x$. Dann gilt:

$$1 + |x-1| = 1 + (x-1) = x \overset{(**)}{>} |x-3| = x - 3 \iff 0 > -3.$$

Dies ist immer erfüllt, d.h. die Ungleichung $(**)$ gilt für alle $x > 3$.

Insgesamt erhält man also: Die Ungleichung $(*)$ gilt genau dann, wenn $x > \frac{3}{2}$ und $x \neq 3$.

Aufgabe 11: Untersuchen Sie, ob die folgenden Mengen $M_1, M_2, M_3 \subset \mathbb{R}$ nach oben bzw. nach unten beschränkt sind und bestimmen Sie ggf. das Supremum bzw. das Infimum. Sind dies Maxima bzw. Minima der jeweiligen Menge?

a) $M_1 := \{(-\frac{1}{2})^m - \frac{4}{n} \mid m, n \in \mathbb{N}\}$.

b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 > 6,\ x < 0\}$.

c) $M_3 := \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2 + 2\}$.

Lösung:

Zu a) Es bezeichne $a_{nm} := (-\frac{1}{2})^m - \frac{4}{n}$.
Es gilt $(-\frac{1}{2})^m = \frac{(-1)^m}{2^m}$.
Für alle natürlichen Zahlen n und m gilt $-\frac{4}{n} \geq -4$ und $-\frac{1}{2^m} \geq -\frac{1}{2}$. Es folgt, dass $-\frac{9}{2}$ eine untere Schranke für M_1 ist, denn
für gerade m gilt:

$$a_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^m} - \frac{4}{n} = \frac{1}{2^m} - \frac{4}{n} > 0 - 4 > -\frac{9}{2},$$

für ungerade m gilt:

$$a_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^m} - \frac{4}{n} = -\frac{1}{2^m} - \frac{4}{n} \geq -\frac{1}{2} - 4 = -\frac{9}{2}.$$

D.h. M_1 ist von unten durch $-\frac{9}{2}$ beschränkt. Da $a_{11} = -\frac{9}{2} \in M_1$, ist $-\frac{9}{2}$ das Minimum von M_1.

Es gilt $\frac{1}{2^m} \leq \frac{1}{4}$ für alle geraden Zahlen $m \in \mathbb{N}$. Es folgt, dass $\frac{1}{4}$ eine obere Schranke von M_1 ist, denn
für ungerade m gilt:

$$a_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^m} - \frac{4}{n} = -\frac{1}{2^m} - \frac{4}{n} < 0 < \frac{1}{4},$$

für gerade m gilt:

$$a_{nm} = \frac{(-1)^m}{2^m} - \frac{4}{n} = \frac{1}{2^m} - \frac{4}{n} \leq \frac{1}{4} - \frac{4}{n} < \frac{1}{4}.$$

Wir zeigen, dass $\frac{1}{4}$ das Supremum von M_1 ist, d.h. dass keine kleinere obere Schranke existiert. Sei $\varepsilon > 0$. Nach dem Archimedischen Axiom existiert ein $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ mit $\frac{4}{n_\varepsilon} < \varepsilon$. Folglich gilt

$$\underbrace{a_{n_\varepsilon 2} = \frac{1}{2^2} - \frac{4}{n_\varepsilon}}_{\in M_1} > \frac{1}{4} - \varepsilon.$$

Die Zahl $\frac{1}{4} - \varepsilon$ ist also keine obere Schranke von M_1, d.h. $\frac{1}{4}$ ist die *kleinste* obere Schranke, d.h. das Supremum von M_1. Da für alle $a_{nm} \in M_1$ gilt, dass $a_{nm} < \frac{1}{4}$, ist $\frac{1}{4}$ kein Maximum von M_1.

Zu b) $M_2 := \{x \in \mathbb{R} \mid x^2 + 2x + 3 > 6,\ x < 0\}$.
Wir formen zunächt die erste Ungleichung unter Beachtung von $x < 0$ um.

$$\begin{array}{rrcll} & x^2+2x+3 & > & 6 & \mid \text{binomische Formel} \\ \Longleftrightarrow & (x+1)^2+2 & > & 6 & \mid -2 \\ \Longleftrightarrow & (x+1)^2 & > & 4 & \mid \sqrt{} \\ \Longleftrightarrow & |x+1| & > & 2 & \mid x<0 \\ \Longleftrightarrow & x & < & -3 & \end{array}$$

Somit erhalten wir $M_2 = (-\infty, -3)$ und damit ist M_2 nicht nach unten beschränkt aber nach oben mit $\sup M_2 = -3$. Das Supremum von M_2 liegt nicht in M_2. Folglich existieren Maximum und Minimum nicht.

Zu c) Wir schreiben zunächst M_3 um.

$$\begin{array}{rcl} M_3 & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } nx = n^2+2\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = \frac{n^2+2}{n}\} \\ & = & \{x \in \mathbb{R} \mid \exists\, n \in \mathbb{N} \text{ mit } x = n + \frac{2}{n}\} \\ & = & \{n + \frac{2}{n} \mid n \in \mathbb{N}\} \end{array}$$

Wir bezeichnen $b_n := n + \frac{2}{n}$.
Zu jeder Zahl $a \in \mathbb{R}$, finden wir ein $n \in \mathbb{N}$ mit $n > a$ (Archimedisches Axiom). Damit ist auch $b_n = n + \frac{2}{n} > a$ und folglich M_3 nicht nach oben beschränkt. M_3 hat also weder Supremum noch Maximum.
Nun zeigen wir, dass 3 eine untere Schranke von M_3 ist. Für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 3$, gilt:

$$b_n = \underbrace{n}_{\geq 3} + \underbrace{\frac{2}{n}}_{>0} > 3.$$

Offensichtlich gilt $b_1 = b_2 = 3$. Somit sind alle Elemente von M_3 größer oder gleich 3. D.h. M_3 hat 3 als eine untere Schranke. Da $3 \in M_3$, ist 3 bereits die größte untere Schranke und zugleich Infimum und Minimum.

Aufgabe 12: Es bezeichnen $A, B \subset \mathbb{R}$ nichtleere beschränkte Mengen reeller Zahlen. Zeigen Sie:

a) $A \cup B$ ist beschränkt und es gilt

$$\begin{array}{rcl} \sup(A \cup B) & = & \max\{\sup A, \sup B\}, \\ \inf(A \cup B) & = & \min\{\inf A, \inf B\}. \end{array}$$

b) Sei $A \cap B \neq \emptyset$. Die Menge $A \cap B$ ist beschränkt und es gilt

$$\begin{array}{rcl} \sup(A \cap B) & \leq & \min\{\sup A, \sup B\}, \\ \max\{\inf A, \inf B\} & \leq & \inf(A \cap B). \end{array}$$

Kann hierbei Gleichheit auftreten? (Begründen Sie Ihre Antwort).

Lösung: Da A und B beschränkt und nicht leer sind, existieren $\sup A, \inf A, \sup B, \inf B$.

Zu a) Wir zeigen zuerst, dass $\max\{\sup A, \sup B\}$ eine obere Schranke von $A \cup B$ ist. Es sei $x \in A \cup B$. Falls $x \in A$ so gilt: $x \leq \sup A \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. Falls $x \notin A$, so folgt $x \in B$ und damit $x \leq \sup B \leq \max\{\sup A, \sup B\}$. D.h. $\max\{\sup A, \sup B\}$ ist eine obere Schranke von $A \cup B$.
Nun zeigen wir, dass es keine kleinere obere Schranke von $A \cup B$ gibt.
Sei also $a < \max\{\sup A, \sup B\}$. OBdA sei $\max\{\sup A, \sup B\} = \sup A$ (sonst benennen wir A und B um). Dann gibt es laut Defninition von $\sup A$ ein Element $x \in A$ mit $x > a$. Es ist aber auch $x \in A \cup B$. Folglich ist a auch keine obere Schranke für $A \cup B$. Somit ist $\max\{\sup A, \sup B\}$ die kleinste obere Schranke von $A \cup B$. D.h. $\sup(A \cup B) = \max\{\sup A, \sup B\}$.
Da sich bei Multiplikation von Ungleichungen mit -1 alle Relationszeichen umkehren, gilt $\inf X = -\sup(-X)$ für alle Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$. (Dabei ist $-X = \{-x \mid x \in X\}$.)
Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \inf(A \cup B) &= -\sup(-A \cup -B) \\ &= -\max\{\sup(-A), \sup(-B)\} \\ &= \min\{-\sup(-A), -\sup(-B)\} \\ &= \min\{\inf(A), \inf(B)\} \end{aligned}$$

Zu b) Wir zeigen, dass $\min\{\sup A, \sup B\}$ eine obere Schranke von $A \cap B$ ist. Es sei $x \in A \cap B$. Damit gilt $x \in A$ und $x \in B$. Also gilt auch $x \leq \sup A$ und $x \leq \sup B$. Damit haben wir $x \leq \min\{\sup A, \sup B\}$. D.h. $\min\{\sup A, \sup B\}$ ist eine obere Schranke von $A \cap B$. Andererseits ist das Supremum die *kleinste* obere Schranke, also gilt $\sup(A \cap B) \leq \min\{\sup A, \sup B\}$.
Da sich bei Multiplikation von Ungleichungen mit -1 alle Relationszeichen umkehren, gilt $\inf X = -\sup(-X)$ für alle Teilmengen $X \subset \mathbb{R}$. (Dabei ist $-X = \{-x \mid x \in X\}$.)
Damit erhalten wir:

$$\begin{aligned} \inf(A \cap B) &= -\sup(-A \cap -B) \\ &\geq -\min\{\sup(-A), \sup(-B)\} \\ &= \max\{-\sup(-A), -\sup(-B)\} \\ &= \max\{\inf(A), \inf(B)\} \end{aligned}$$

Dabei *kann* Gleichheit auftreten, das einfachste Beispiel hierfür ist $B = A$. Im Allgemeinen wird aber keine Gleichheit auftreten. Beispiel: $A = \{1, 2\}, B = \{1, 3\}$.

$$\sup(A \cap B) = \sup(\{1\}) = 1 < \min\{\sup A, \sup B\} = \min\{2, 3\} = 2$$

Ein Gegenbeispiel für die Gleichheit beim Infimum erhalten wir durch Multiplikation mit -1, $A = \{-2, -1\}, B = \{-3, -1\}$.