Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 5

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 13

Wir betrachten zwei abzählbare Mengen A und B. Entscheiden Sie, ob die folgenden Mengen höchstens abzählbar, abzählbar oder überabzählbar sind:

a) $A \times B$,

b) $A \cup B$,

c) $A \cap B$.

Beweisen Sie Ihre Aussagen.

Lösung:

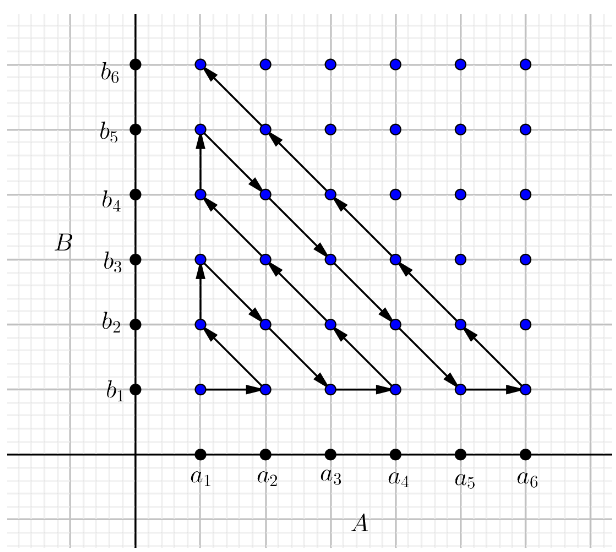
Zu a) Das Produkt $A \times B$ ist abzählbar.

Beweis: Wir beweisen das mit einem Diagonalverfahren (ähnlich wie die Abzählbarkeit von $\mathbb{Q}$). Da A und B abzählbar sind, können wir sie in der Form

$$\begin{aligned} A &= \{a_1, a_2, a_3, ...\} \\ B &= \{b_1, b_2, b_3, ...\} \end{aligned}$$

schreiben. Dann ist $A \times B$ die Menge der geordneten Paare (a_i, b_j), wobei $i, j \in \mathbb{N}$. Wir konstruieren eine Abzählung von $A \times B$ im Diagonalverfahren, das wir zunächst grafisch darstellen:

In der Grafik entsprechen die blauen Gitterpunkte jeweils einem Element $(a_i, b_j) \in A \times B$. Die Pfeile (von links unten beginnend) beschreiben die Reihenfolge, in der wir die Elemente von $A \times B$ abzählen. Die Konstruktion zeigt, dass wir dabei jedes Element von $A \times B$ genau einmal durchlaufen.



Wir wollen diese Abzählvorschrift auch noch explizit angeben, d.h. die Bijektion $f : A \times B \to \mathbb{N}$ angeben, die durch diese Grafik beschrieben wird (das erwarte ich nicht bei der Lösung der Aufgabe). Wir bemerken dazu, dass auf den eingezeichneten Diagonalen, die die Pfeile bilden, jeweils die Summe der Indizes konstant ist, d.h. wenn (a_i, b_j) und (a_k, b_l) auf der selben Diagonalen stehen, so ist $i + j = k + l$ und auf dieser Diagonalen stehen $i+j-1$ Elemente. Wenn wir nun die Diagonalen jeweils in Pfeilrichtung abarbeiten so gilt folgendes: Kommen wir bei einem Element (a_i, b_j) an, so haben wir bereits alle Diagonalen mit kleineren Summen abgearbeitet und dabei $\sum\limits_{k=2}^{i+j-1}(k-1)$ Elemente passiert. Auf der aktuellen Diagonalen ist (a_i, b_j) der j-te Eintrag, falls der Pfeil nach oben zeigt, d.h. $i + j$ ungerade ist. Zeigt der Pfeil nach unten, d.h. ist $i + j$ gerade, so ist (a_i, b_j) der i-te Eintrag auf der Diagonalen. Insgesamt können wir die Abzählvorschrift also durch folgende Bijektion $f : A \times B \to \mathbb{N}$ angeben:

$$f(a_i, b_j) := \begin{cases} \sum\limits_{k=2}^{i+j-1}(k-1) + j & \text{falls } i + j \text{ ungerade} \\ \sum\limits_{k=2}^{i+j-1}(k-1) + i & \text{falls } i + j \text{ gerade.} \end{cases}$$

Zu b) Die Vereinigung $A \cup B$ ist abzählbar.

Beweis: Zunächst bemerken wir: Ist X eine abzählbare Menge und $C \subset X$, so ist C höchstens abzählbar. Dies sieht man wie folgt: Ist C nicht endlich (oder leer), so betrachtet man eine Abzählung $X = \{x_1, x_2, ...\}$, streicht alle x_i heraus, die nicht zu C gehören und nummeriert die verbleibenden Elemente wieder fortlaufend. Dies ergibt eine Abzählung von C.

Wir zeigen nun, dass $A \cup B$ abzählbar ist. Ist $B = A$, so ist $A \cup B = A$ und damit abzählbar. Ist $B \neq A$, so zerlegen wir $A \cup B$ in die beiden disjunkten nichtleeren Teilmengen $A \cup B = A \cup (B \setminus A)$. Als Teilmenge von B ist $B \setminus A$ höchstens abzählbar. Wir unterschieden nun zwei Fälle:

1. Fall: $B \setminus A$ ist endlich, d.h. $B \setminus A = \{b_1, ..., b_n\}$. Sei außerdem $f : \mathbb{N} \to A$ eine Bijektion. Wir definieren die Abbildung $F : \mathbb{N} \longrightarrow A \cup B$ durch

$$F(k) := \begin{cases} b_k, & \text{falls } k \leq n \\ f(k-n), & \text{falls } k > n. \end{cases}$$

F ist injektiv, da f injektiv ist und $b_j \notin A$ für alle $j = 1, ..., n$.
F ist surjektiv, denn für ein Element $a \in A \cup B$ gilt entweder $a \in A$ und daher $a = f(m) = F(m + n)$ für ein $m \in \mathbb{N}$ oder $a \in B \setminus A$, d.h. $a = b_j = F(j)$ für ein $j \in \{1, \dots, n\}$.
Also ist $F : \mathbb{N} \to A \cup B$ bijektiv und somit $A \cup B$ abzählbar.

2. Fall: $B \setminus A$ ist abzählbar. Seien $f : \mathbb{N} \to A$ und $g : \mathbb{N} \to (B \setminus A)$ Bijektionen. Wir definieren die Abbildung $H : \mathbb{N} \to A \cup B$ durch

$$H(n) := \begin{cases} f(k), & \text{falls } n = 2k \\ g(k), & \text{falls } n = 2k - 1. \end{cases}$$

H ist injektiv: Um das zu zeigen betrachten wir $n, m \in \mathbb{N}$ mit $H(n) = H(m)$. Da die Mengen $A = im(f)$ und $(B \setminus A) = im(g)$ disjunkt sind, kann $H(n)$ nur in genau einer der beiden Mengen liegen. Dann folgt aber aus der Injektivität von f bzw. von g, dass $n = m$.

Also ist H injektiv.
H auch surjektiv: Um das zu zeigen, betrachten wir ein $a \in A \cup B$. Falls $a \in A$, existiert wegen der Bijektivität von f ein $k \in \mathbb{N}$ so dass $a = f(k) = H(2k)$. Ist $a \notin A$, so gilt $a \in (B \setminus A)$. Aus der Bijektivität von g folgt dann $a = g(k) = H(2k-1)$ für ein geeignetes $k \in \mathbb{N}$. Also ist H surjektiv.
Also ist $H : \mathbb{N} \to A \cup B$ bijektiv und somit $A \cup B$ abzählbar. $\square$

Zu c): $A \cap B$ ist als Teilmenge von A höchstens abzählbar (siehe bei b).

Aufgabe 14

Zeigen Sie, dass für alle $n \in \mathbb{N}$ und alle positiven reellen Zahlen $a_1, \ldots, a_n$ gilt:

$$\underbrace{\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{arithmetisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\ldots,a_n}} \quad \geq \quad \underbrace{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{geometrisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\ldots,a_n}} \quad \geq \quad \underbrace{\frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}}_{\substack{\uparrow \\ \textit{harmonisches Mittel} \\ \textit{von } a_1,\ldots,a_n}}.$$

Zeigen Sie außerdem, dass in beiden Ungleichungen die Gleichheit genau dann eintritt, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Lösung:

Wir zeigen zuerst die Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:
Wir setzen dazu $p_n := a_1 \cdot \ldots \cdot a_n$ und $x_i = \frac{a_i}{\sqrt[n]{p_n}}$. Dann sind $x_1, \ldots, x_n$ positive reelle Zahlen mit

$$x_1 \cdot \ldots \cdot x_n = \frac{a_1}{\sqrt[n]{p_n}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_n}{\sqrt[n]{p_n}} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{(\sqrt[n]{p_n})^n} = \frac{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}{p_n} = 1.$$

Nach Aufgabe 8c) gilt dann

$$n \leq x_1 + \ldots + x_n = \frac{a_1}{\sqrt[n]{p_n}} + \ldots + \frac{a_n}{\sqrt[n]{p_n}} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{p_n}} = \frac{a_1 + \ldots + a_n}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}.$$

Daraus folgt durch Umstellen die behauptete Ungleichung

$$\frac{a_1 + \ldots + a_n}{n} \geq \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}.$$

Die Gleichheit tritt in dieser Ungleichung genau dann auf, wenn $x_1 = \ldots = x_n = 1$ (siehe Aufgabe 8c). Dies ist nach Definition der x_i genau dann der Fall, wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Wir zeigen nun die Ungleichung zwischen geometrischem und harmonischem Mittel:
Wir setzen dazu $y_i := \frac{1}{a_i}$. Die reellen Zahlen $y_1, \ldots, y_n$ sind positiv. Für ihr arithmetisches und geometrisches Mittel gilt:

$$\frac{y_1 + \ldots + y_n}{n} \geq \sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}.$$

Durch Umstellen dieser Ungleichung erhalten wir:

$$\frac{1}{\sqrt[n]{y_1 \cdot \ldots \cdot y_n}} \geq \frac{n}{y_1 + \ldots + y_n}.$$

Setzen wir die Definition von y_i ein, so folgt die behauptete Ungleichung

$$\frac{1}{\sqrt[n]{\frac{1}{a_1} \cdot \ldots \cdot \frac{1}{a_n}}} = \frac{1}{\frac{1}{\sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots \cdot a_n}}} = \sqrt[n]{a_1 \cdot \ldots a_n} \;\geq\; \frac{n}{\frac{1}{a_1} + \ldots + \frac{1}{a_n}}.$$

Die Gleichheit tritt dabei genau dann ein, wenn $y_1 = \ldots = y_n$, d.h. wenn $a_1 = \ldots = a_n$.

Aufgabe 15

Zeigen Sie, dass für alle $x, y \in \mathbb{R}^+$ und für alle $n \in \mathbb{N}$ die folgenden Ungleichungen gelten:

a) $\sqrt[n]{x+y} \leq \sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}$,

b) $|\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y}| \leq \sqrt[n]{|x-y|}$,

c) $\frac{x-1}{n} \geq \sqrt[n]{x} - 1$.

Lösung:

Zu a): Beide Seiten der Ungleichung a) sind positiv, daher ist a) äquivalent zu

$$x + y \leq \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n \qquad (*)$$

Wir beweisen nun diese Ungleichung (*) mit Hilfe der Binomischen Formel. Es gilt

$$\begin{aligned} \left(\sqrt[n]{x} + \sqrt[n]{y}\right)^n &= \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{x}\right)^k \left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k} \\ &= \underbrace{y}_{k=0} + \underbrace{\sum_{k=1}^{n-1} \binom{n}{k} \left(\sqrt[n]{x}\right)^k \left(\sqrt[n]{y}\right)^{n-k}}_{\geq 0} + \underbrace{x}_{k=n} \\ &\geq x + y. \end{aligned}$$

Damit ist $(*)$ und folglich a) bewiesen. □

Zu b) Da $|a| = |-a|$, können wir oBdA annehmen, dass $x \geq y$. Dann gilt auch $\sqrt[n]{x} \geq \sqrt[n]{y}$. In diesem Fall ist die Ungleichung b) äquivalent zu

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y}. \qquad (**)$$

Wir beweisen nun $(**)$. Nach Teilaufgabe a) gilt

$$\sqrt[n]{x} = \sqrt[n]{(x-y)+y} \overset{a)}{\leq} \sqrt[n]{x-y} + \sqrt[n]{y}$$

und folglich

$$\sqrt[n]{x} - \sqrt[n]{y} \leq \sqrt[n]{x-y}.$$

Damit ist ($**$) und somit b) bewiesen. $\square$

Zu c) Die Behauptung c) kann man durch Multiplikation mit n und Addition von 1 zu der äquivalenten Ungleichung

$$x \geq 1 + n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right) \qquad (***)$$

umformen. Wir zeigen ($***$) mit Hilfe der Bernoulli-Ungleichung. Da $y := \sqrt[n]{x} - 1 \geq -1$, können wir die Bernoullische Ungleichung auf $y = \sqrt[n]{x} - 1$ anwenden und erhalten

$$x = \left(1 + \sqrt[n]{x} - 1\right)^n \overset{Bern.Ungl}{\geq} 1 + n\left(\sqrt[n]{x} - 1\right)$$

und somit ($***$). Folglich gilt c). $\square$