Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 6

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 16

a) Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der algebraischen Form $a + ib$ dar:

$$\frac{5+i}{1-3i}\,, \qquad \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^2\,, \qquad \left(\frac{1+3i}{1-i}\right)^4 .$$

b) Bestimmen Sie für die folgenden komplexen Zahlen die trigonometrische Darstellung:

$$\frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i\,, \qquad \frac{1-i}{1+i}\,, \qquad (-3+3i)^3 .$$

Lösung: Zu a):

- Wir erweitern $z_1 := \frac{5+i}{1-3i}$ mit dem komplex-Konjugierten des Nenners und erhalten:

  $$z_1 = \frac{5+i}{1-3i} = \frac{(5+i)(1+3i)}{(1-3i)(1+3i)} = \frac{5+i+15i+3i^2}{1-(3i)^2} = \frac{2+16i}{1+9}.$$

  Folglich gilt: $z_1 = \frac{1}{5} + \frac{8}{5}i$.

- Wir stellen zunächst wie eben die komplexe Zahl $w := \frac{1+i}{1-i}$ in der algebraischen Form dar:

  $$w = \frac{1+i}{1-i} = \frac{(1+i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-1+2i}{2} = i.$$

  Dann folgt $z_2 := w^2 = i^2 = -1$.

- Wir stellen zunächst die komplexe Zahl $u := \frac{1+3i}{1-i}$ in der algebraischen Form dar:

  $$u = \frac{1+3i}{1-i} = \frac{(1+3i)(1+i)}{(1-i)(1+i)} = \frac{1-3+4i}{2} = -1+2i.$$

  Nun berechnen wir $z_3 := u^4$ mittels Binomischer Formel:

  $$\begin{aligned} z_3 &= u^4 = (-1+2i)^4 = \sum_{k=0}^{4} \binom{4}{k} (-1)^k (2i)^{4-k} \\ &= (2i)^4 - 4\cdot(2i)^3 + 6\cdot(2i)^2 - 4\cdot(2i) + 1 = 16 + 4\cdot 8i - 24 - 8i + 1 \\ &= -7 + 24i. \end{aligned}$$

Zu b) Die trigonometrische Darstellung einer von Null verschiedenen komplexen Zahl $z \in \mathbb{C}$ ist gegeben durch

$$z = |z|(\cos\varphi + i\sin\varphi),$$

wobei φ der orientierte Winkel zwischen der x-Achse und dem Strahl ist, der von 0 durch z verläuft.

- Für $z_4 := \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2}i$ gilt

$$|z_4| = \sqrt{\left(\frac{1}{2}\right)^2 + \left(\frac{\sqrt{3}}{2}\right)^2} = \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{3}{4}} = 1.$$

  Der von der x-Achse und dem Strahl von 0 durch z_4 eingeschlossene Winkel ist $\varphi = 60°$, denn $\cos 60° = \frac{1}{2}$ und $\sin 60° = \frac{\sqrt{3}}{2}$. Damit ergibt sich als trigonometrische Darstellung von z_4:

$$z_4 = \cos 60° + i \sin 60°.$$

- Wir stellen $z_5 := \frac{1-i}{1+i}$ zuerst in der algebraischen Form dar:

$$z_5 = \frac{(1-i)(1-i)}{(1+i)(1-i)} = \frac{1-1-2i}{2} = -i.$$

  Daraus können wir die trigonometrische Darstellung ablesen, da wir wissen an welcher Stelle der Gaußschen Zahlenebene $-i$ liegt: $|z_5| = 1$ und für den Winkel φ gilt $\varphi = 270°$. Also ist die trignometrische Darstellung:

$$z_5 = \cos 270° + i \sin 270°.$$

- $z_6 := (-3+3i)^3$ ist von der Gestalt $z_3 = w^3$ mit $w = -3+3i$. Der Betrag von w ist $|w| = \sqrt{9+9} = \sqrt{18} = 3\sqrt{2}$. Den Winkel φ zwischen der x-Achse und dem Strahl von 0 durch w können wir wieder direkt aus der Lage von w ablesen, es gilt: $\varphi = 135°$. Somit ist die trigonometrische Darstellung von w gegeben durch

$$w = 3\sqrt{2}(\cos 135° + i \sin 135°).$$

  Daraus erhält man für die Potenz $z_6 = w^3$ die trigonometrische Darstellung

$$z_6 \quad = \quad (3\sqrt{2})^3 \cdot (\cos(3 \cdot 135°) + \sin(3 \cdot 135°)) = 54 \cdot \sqrt{2} \cdot (\cos 45° + i \sin 45°).$$

Aufgabe 17

a) Beweisen Sie, dass für zwei komplexe Zahlen z und w das folgende *Parallelogrammgesetz* gilt:

$$|z+w|^2 + |z-w|^2 = 2(|z|^2 + |w|^2).$$

   Was bedeutet diese Formel geometrisch?

b) Zeichnen Sie die folgenden Mengen in der Gaußschen Zahlenebene:

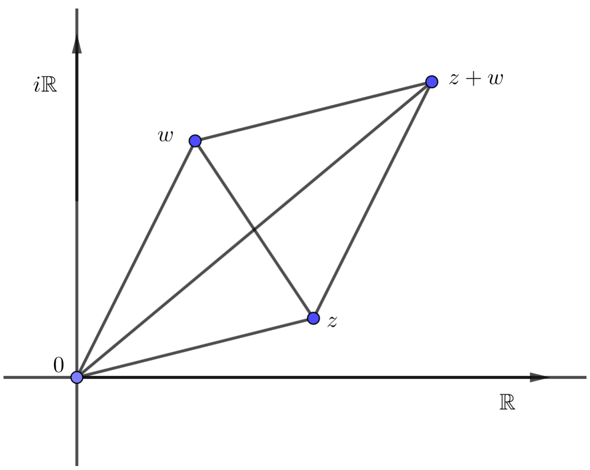
$$M_1 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z-1| = |z+1|\}.$$
$$M_2 := \{z \in \mathbb{C} \mid 1 \leq |z-i| \leq 2\}.$$
$$M_3 := \{z \in \mathbb{C} \mid z^6 = \tfrac{1}{2} + \tfrac{1}{2}\sqrt{3}i\}.$$
$$M_4 := \{z \in \mathbb{C} \mid z \neq 0 \text{ und } \tfrac{1}{z} + \tfrac{1}{\bar{z}} = 1\}.$$
$$M_5 := \{z \in \mathbb{C} \mid |z| - Im(z) = 1\}.$$
$$M_6 := \{z \in \mathbb{C} \mid Re(z^2) = 1\}.$$

Eine Begründung wird dabei nicht verlangt, aber die Menge muß in der Zeichnung klar erkennbar sein.

Lösung: **Zu a)** Aus der Definition des Betrages einer komplexen Zahl folgt:

$$\begin{aligned}
|z+w|^2+|z-w|^2 &= (z+w)\overline{(z+w)}+(z-w)\overline{(z-w)} \\
&= (z+w)(\overline{z}+\overline{w})+(z-w)(\overline{z}-\overline{w}) \\
&= z\overline{z}+w\overline{w}+z\overline{w}+w\overline{z}+z\overline{z}+w\overline{w}-w\overline{z}-z\overline{w} \\
&= 2(z\overline{z}+w\overline{w}) \\
&= 2(|z|^2+|w|^2). \qquad \square
\end{aligned}$$

Zur geometrischen Deutung: Die Punkte $0, z, w, z+w$ bilden in der Gaußschen Zahlenebene ein Parallelogramm:

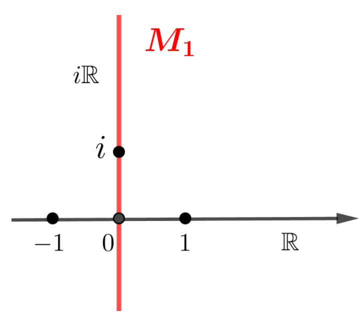


- $|z+w|$ ist die Länge der Diagonalen von 0 bis $z+w$.
- $|z-w|$ ist die Länge der Diagonalen von z bis w.
- $|z|$ bzw. $|w|$ sind die Längen der Seiten.

Das Parallelogrammgesetz besagt nun: *Die Summe der Quadrate der Diagonalenlängen eines Parallelogramms ist gleich der Summe der Quadrate aller Seitenlängen.*

Zu b) Wir erinnern uns wieder daran, dass für zwei komplexe Zahlen z und w die Zahl $|z-w|$ den Euklidischen Abstand der beiden Punkte z und w in der Gaußschen Zahlenebene beschreibt, d.h. die Länge der Strecke von z nach w.

M_1: Anschaulich wird die Menge M_1 sofort offensichtlich, wenn wir ihre Definition in Worte fassen: Sie besteht aus den Punkten der Gaußschen Zahlenebene, die von den Punkten $p_+ = 1$ und $p_- = -1$ gleichweit entfernt sind, also der Mittelsenkrechten der Strecke $\overline{p_+p_-}$. Das ist gerade die imaginäre Achse.

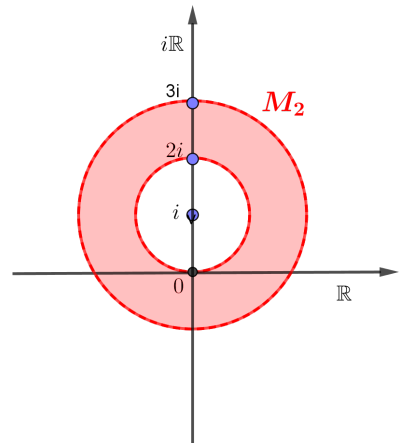


Formal zeigt man das wie folgt:

$$\begin{aligned}
z \in M_1 &\Leftrightarrow |z-1| = |z+1| \\
&\Leftrightarrow |z-1|^2 = |z+1|^2 \\
&\Leftrightarrow (z-1)(\bar{z}-1) = (z+1)(\bar{z}+1) \\
&\Leftrightarrow z\bar{z}-z-\bar{z}+1 = z\bar{z}+z+\bar{z}+1 \\
&\Leftrightarrow -(z+\bar{z}) = z+\bar{z} \\
&\Leftrightarrow z+\bar{z} = 2Re(z) = 0
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \quad z \text{ ist rein imaginär}$$

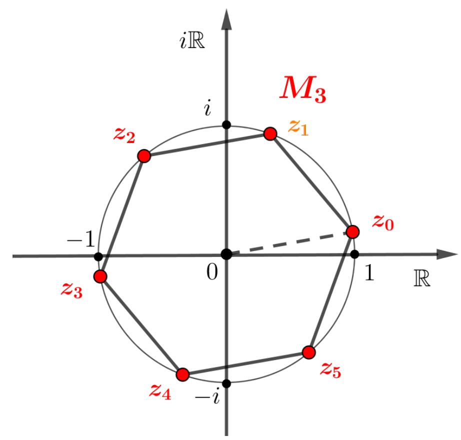
M_2: Auch hier hilft eine Übersetzung ins Umgangssprachliche: M_2 besteht aus den Punkten der Gaußschen Zahlenebene, deren Abstand zum 'Punkt' i größer oder gleich als 1 aber kleiner oder gleich als 2 ist, also entspricht M_2 einem *Kreisring* um i mit innerem Radius 1 und äußerem Radius 2.



M_3: Wir betrachten $w := \frac{1}{2} + i\frac{\sqrt{3}}{2} = \cos 60° + i \sin 60°$. Gesucht sind die $z \in \mathbb{C}$ mit $z^6 = w$. Aus der Formel für die n-te Wurzel einer komplexen Zahl aus der Vorlesung wissen wir, dass dann z von folgender Gestalt ist: $z = z_k$ für $k = 0, 1, 2, 3, 4, 5$, wobei

$$\begin{aligned} z_k &:= \cos\left(\frac{60°}{6} + \frac{k \cdot 360°}{6}\right) + i \sin\left(\frac{60°}{6} + \frac{k \cdot 360°}{6}\right) \\ &= \cos(10° + k \cdot 60°) + i \sin(10° + k \cdot 60°). \end{aligned}$$

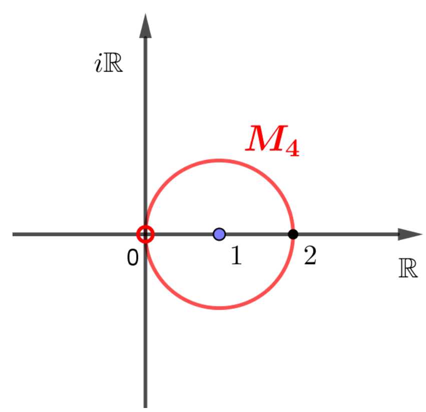
M_3 besteht also aus den Ecken eines regelmäßigen Sechsecks, die auf dem Einheitskreis liegen.



M_4: Wir beschreiben die Elemente von $\mathbb{C}$ durch ihren Real- und Imaginärteil.
Sei $z = x + iy \neq 0$. Dann gilt:

$$\begin{aligned} z = x + iy \in M_4 \quad &\Longleftrightarrow \quad \frac{1}{z} + \frac{1}{\overline{z}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{\overline{z} + z}{z \cdot \overline{z}} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad \frac{2\,Re(z)}{|z|^2} = 1 \\ &\Longleftrightarrow \quad 2x = x^2 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 = x^2 - 2x + 1 + y^2 \\ &\Longleftrightarrow \quad 1 = (x-1)^2 + y^2. \end{aligned}$$

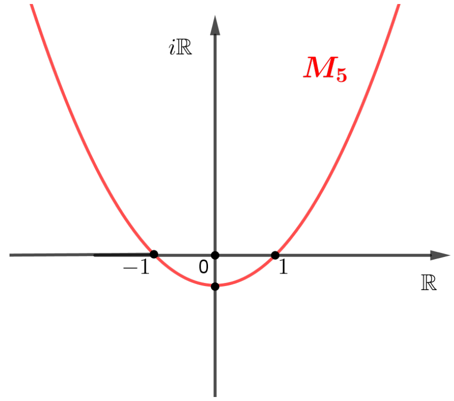
Also beschreibt die Menge M_4 einen *Kreis* mit Mittelpunkt 1 und Radius 1, aus dem 0 entfernt ist.



M_5: Es gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
z = x + iy \in M_5 \quad &\iff \quad |z| - Im(z) = 1 \\
&\iff \quad \sqrt{x^2 + y^2} - y = 1 \\
&\iff \quad \sqrt{x^2 + y^2} = 1 + y \\
&\iff \quad x^2 + y^2 = (1 + y)^2 \\
&\iff \quad x^2 + y^2 = 1 + 2y + y^2 \\
&\iff \quad x^2 = 1 + 2y \\
&\iff \quad y = \tfrac{1}{2}x^2 - \tfrac{1}{2}.
\end{aligned}
$$

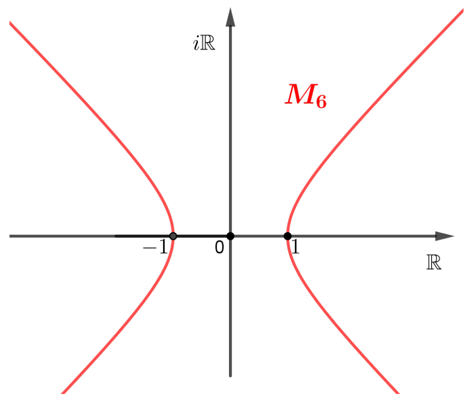
D.h. die Menge M_5 beschreibt eine *Parabel*.



M_6: Es gilt für $z = x + iy \in \mathbb{C}$:

$$
\begin{aligned}
z = x + iy \in M_6 \quad &\iff \quad 1 = Re(z^2) \\
&\qquad\;\; = Re((x + iy)(x + iy)) \\
&\qquad\;\; = Re(x^2 - y^2 + 2xy\, i) \\
&\iff \quad 1 = x^2 - y^2.
\end{aligned}
$$

Diese Menge ist eine *Hyperbel* in der Gaußschen Zahlenebene.



Aufgabe 18

Wir betrachten die Abbildung $F : \mathbb{C} \setminus \{-i\} \to \mathbb{C}$, definiert durch

$$F(z) := \frac{z - i}{z + i} \qquad \text{für } z \in \mathbb{C},\ z \neq -i.$$

Wir bezeichnen mit H^+ die obere Halbebene in $\mathbb{C}$ und mit D die offene Einheitskreisscheibe um 0, d.h.

$$
\begin{aligned}
H^+ \quad &:= \quad \{z \in \mathbb{C} \mid Im(z) > 0\}, \\
D \quad &:= \quad \{z \in \mathbb{C} \mid |z| < 1\}.
\end{aligned}
$$

a) Zeigen Sie, dass F die obere Halbebene H^+ in die Kreisscheibe D abbildet, d.h. dass $F(H^+) \subset D$.

b) Zeigen Sie, dass die Abbildung

$$
\begin{aligned}
F|_{H^+} : \quad H^+ \quad &\longrightarrow \quad D \\
z \quad &\longmapsto \quad F(z) := \tfrac{z-i}{z+i}
\end{aligned}
$$

bijektiv ist.

c) Geben Sie die Umkehrabbildung von $F|_{H^+}$ an.

Lösung:

Zu a) Wir zeigen, dass F die obere Halbebene H^+ in die Kreisscheibe D abbildet.
Es gilt für $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq -i$:

$$\begin{array}{rrcll}
|F(z)| < 1 & \iff \left|\frac{z-i}{z+i}\right| = \frac{|z-i|}{|z+i|} & < & 1 & \\
& \iff |z-i| & < & |z+i| & \\
& \iff |z-i|^2 & < & |z+i|^2 & \\
& \iff (z-i)(\overline{z-i}) & < & (z+i)(\overline{z+i}) & \\
& \iff (z-i)(\overline{z}+i) & < & (z+i)(\overline{z}-i) & \\
& \iff z\overline{z} - i\overline{z} + iz + 1 & < & z\overline{z} + i\overline{z} - iz + 1 & \\
& \iff i(z-\overline{z}) & < & -i(z-\overline{z}) & \quad \mid \; z-\overline{z} = 2i\,Im(z) \\
& \iff -2 \cdot Im(z) & < & 2 \cdot Im(z) & \\
& \iff 0 & < & Im(z) &
\end{array}$$

Für alle $z \in H^+$ ist aber $z \neq -i$ und $Im(z) > 0$ erfüllt, d.h. $F(H^+) \subset D$.

Beachten Sie: In der obigen Ungleichungskette werden nur REELLE Zahlen miteinander verglichen! Auf der Menge der komplexen Zahlen existiert keine Anordnung, d.h. kein $\leq$.

Zu b) Um zu zeigen, dass $F|_{H^+} : H^+ \to D$ bijektiv ist, müssen wir zeigen, dass es für *jedes* Element $w \in D$ *genau ein* $z \in H^+$ gibt mit $F(z) = w$.
Es gilt für $z \in \mathbb{C}$ und $z \neq -i$:

$$\begin{array}{rrcll}
w = F(z) & \iff w & = & \frac{z-i}{z+i} & \mid \; \cdot(z+i) \\
& \iff wz + wi & = & z - i & \mid \; -wz + i \\
& \iff i + wi & = & z - wz & \\
& \iff i + wi & = & z(1-w) & \mid : \underbrace{(1-w)}_{\neq 0} \\
& \iff z & = & \frac{i+wi}{1-w}. &
\end{array}$$

D.h. für $w \in D$ existiert genau eine von $-i$ verschiedene komplexe Zahl, nämlich $z_w := \frac{i+wi}{1-w}$, so dass $F(z_w) = w$. Da $|w| < 1$ folgt aus a), dass $z_w \in H^+$. D.h. jedes Element $w \in D$ besitzt bei F genau ein Urbild in H^+, nämlich $\frac{i+wi}{1-w}$. Folglich ist $F|_{H^+} : H^+ \to D$ bijektiv.

Zu c) Nach Definition ist die Umkehrabbildung von $F|_{H^+}$ dann gegeben durch

$$\begin{array}{rccc}
(F|_{H^+})^{-1} : & D & \longrightarrow & H^+ \\
& w & \longmapsto & \frac{i+wi}{1-w}.
\end{array}$$