Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 7

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 19: Es sei (x_n) eine konvergente Folge positiver reeller Zahlen und $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Zeigen Sie:

a) $x \geq 0$.

b) Für jedes $k \in \mathbb{N}$ konvergiert die Folge $(\sqrt[k]{x_n})$ gegen $\sqrt[k]{x}$.
(Für $x = 0$ setzen wir dabei $\sqrt[k]{0} := 0$).

c) Für jede positive rationale Zahl q konvergiert die Folge (x_n^q) gegen x^q.

d) Ist q eine negative rationale Zahl und $x > 0$, so konvergiert die Folge (x_n^q) gegen x^q.

Lösung:

Zu a) Da $x_n > 0$ für alle $n \in \mathbb{N}$, folgt für den Grenzwert von (x_n):
$\lim\limits_{n\to\infty} x_n = x \geq 0$ (Grenzwertsatz aus der Vorlesung).

Zu b) Wir benutzen die Abschätzung für die Wurzeln aus Aufgabe 15b):
Es gilt
$$\left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{x}\right| \leq \sqrt[k]{|x_n - x|} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}. \qquad (*)$$
Sei $\varepsilon > 0$. Da (x_n) gegen x konvergiert, existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass
$$|x_n - x| < \varepsilon^k \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$
Folglich gilt wegen $(*)$
$$\left|\sqrt[k]{x_n} - \sqrt[k]{x}\right| \leq \sqrt[k]{|x_n - x|} < \sqrt[k]{\varepsilon^k} = \varepsilon \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$
Somit konvergiert die Folge $(\sqrt[k]{x_n})$ gegen $\sqrt[k]{x}$.

Zu c) Eine positive rationale Zahl q kann man in der Form $q = \frac{l}{k}$ darstellen, wobei $l, k \in \mathbb{N}$. Dann gilt $x_n^q = (\sqrt[k]{x_n})^l$. Nach b) wissen wir, dass die Folge $(\sqrt[k]{x_n})$ gegen $\sqrt[k]{x}$ konvergiert. Aus dem Grenzwertsatz für das Produkt von Folgen erhalten wir dann, dass die Folge $((\sqrt[k]{x_n})^l)$ gegen $(\sqrt[k]{x})^l$ konvergiert. Folglich konvergiert die Folge (x_n^q) gegen x^q.

Zu d) Sei q eine negative rationale Zahl und $x > 0$. Dann gilt $x_n^q = \frac{1}{x_n^{-q}}$. Da dann $-q$ eine positive rationale Zahl ist, folgt aus c) und dem Grenzwertsatz für Quotienten von Folgen, dass (x_n^q) gegen $\frac{1}{x^{-q}} = x^q$ konvergiert.

Aufgabe 20 Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen reeller Zahlen $(a_n), (b_n), (c_n), (d_n), (e_n)$ konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis !):

a) $a_n := \frac{n^4+3n^2+3n+1}{6n^4+3}$.

b) $b_n := \frac{2+\frac{5}{\sqrt{n}}}{1+3\sqrt{n}}$.

c) $d_n := (-1)^n \cdot \sqrt[n]{n} + \frac{n^3}{5^n}$.

d) $c_n := \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3n}$.

e) $e_n := \frac{1^2}{n^3} + \frac{2^2}{n^3} + \frac{3^2}{n^3} + \ldots + \frac{n^2}{n^3}$.

Lösung: Zu a): Da Zähler und Nenner gleichermaßen gegen unendlich streben, können wir die Rechenregeln für Grenzwerte nicht ohne Weiteres anwenden. Wir kürzen daher um n^4 und erhalten

$$a_n = \frac{n^4+3n^2+3n+1}{6n^4+3} = \frac{1+\frac{3}{n^2}+\frac{3}{n^3}+\frac{1}{n^4}}{6+\frac{3}{n^4}}.$$

Strebt eine Folge (x_n) gegen unendlich, so ist $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{x_n} = 0$. Insbesondere gilt also $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{a}{n^k} = 0$ für beliebige $a \in \mathbb{R}$ und $k \in \mathbb{N}$. Somit existieren die Grenzwerte aller Summanden in Zähler und Nenner und wir erhalten nach den Grenzwertsätzen für Summen und Quotienten von Folgen, dass (a_n) konvergiert und für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \frac{\lim\limits_{n\to\infty} 1 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^2} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^3} + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{n^4}}{\lim\limits_{n\to\infty} 6 + \lim\limits_{n\to\infty} \frac{3}{n^4}} = \frac{1+0+0+0}{6+0} = \frac{1}{6}.$$

Zu b) Die Folge $\frac{5}{\sqrt{n}}$ konvergiert gegen Null, folglich konvergiert die Folge der Zähler von (b_n) gegen 2. Die Folge der Nenner von (b_n) strebt gegen unendlich und wir erhalten aus den Grenzwertsätzen, dass (b_n) konvergiert und für den Grenzwert

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty}\Big((2+\frac{5}{\sqrt{n}}) \cdot \frac{1}{1+3\sqrt{n}}\Big) = \lim_{n\to\infty}(2+\frac{5}{\sqrt{n}}) \cdot \lim_{n\to\infty} \frac{1}{1+3\sqrt{n}} = 2 \cdot 0 = 0.$$

Zu c) Um die Folge $c_n := (-1)^n \sqrt[n]{n} + \frac{n^3}{5^n}$ zu behandeln, betrachten wir zunächst die Grenzwerte ihrer Summanden. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{n^3}{5^n} = 0$ und $\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$. Wenn wir also die Teilfolgen c_{2k} und c_{2k-1} betrachten, so folgt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{k\to\infty} c_{2k} = 1 \quad \text{und} \quad \lim_{k\to\infty} c_{2k-1} = -1.$$

Somit sind -1 und $+1$ zwei verschiedene Häufungspunkte von (c_n), d.h. (c_n) kann nicht konvergieren.

Zu d) Wir betrachten nun $d_n = \sqrt{n^2+2} - \sqrt{n^2+3n}$. Wir nutzen hier einen Standard-Trick für den Umgang mit solchen Differenzen von Wurzeln und berechnen

$$\begin{aligned} d_n &= d_n \cdot \frac{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{(n^2+2)-(n^2+3n)}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}} = \frac{2-3n}{\sqrt{n^2+2}+\sqrt{n^2+3n}} \\ &= \frac{\frac{2}{n}-3}{\sqrt{1+\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\frac{3}{n}}}. \end{aligned}$$

Nachdem man sich überzeugt hat, dass die Grenzwerte der einzelnen Summanden in Zähler und Nenner von (d_n) alle existieren (benutze auch Aufgabe 19b), kann man die Grenzwertsätze anwenden und erhält, dass (d_n) konvergiert und für den Grenzwert

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} d_n &= \frac{\lim\limits_{n\to\infty} \frac{2}{n} - 3}{\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{2}{n^2}} + \lim\limits_{n\to\infty}\sqrt{1+\frac{3}{n}}} = \frac{0-3}{\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{2}{n^2}}+\sqrt{1+\lim\limits_{n\to\infty}\frac{3}{n}}} \\ &= \frac{-3}{\sqrt{1+0}+\sqrt{1+0}} = -\frac{3}{2}. \end{aligned}$$

Zu e) Es ist vielleicht verlockend, auch für die Folge $\left(e_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{n^2}{n^3}\right)$ den Grenzwertsatz für Summen zu benutzen. Dies ist hier aber nicht (!!) möglich, da auch die Anzahl der Summanden mit n wächst (!!). Statt dessen schreiben wir e_n wie folgt um:

$$e_n = \frac{1^2}{n^3}+\frac{2^2}{n^3}+\frac{3^2}{n^3}+\ldots+\frac{n^2}{n^3} = \frac{1}{n^3}\cdot\left(\sum_{k=1}^{n} k^2\right).$$

Aus Übungsaufgabe 7 ist bekannt, dass

$$\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{1}{6}\left(n(n+1)(2n+1)\right).$$

Wir erhalten also

$$e_n = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6n^3} = \frac{2n^3+3n^2+n}{6n^3} = \frac{2+\frac{3}{n}+\frac{1}{n^2}}{6}.$$

Aus den Grenzwertsätzen folgt dann, dass (e_n) konvergiert und $\lim\limits_{n\to\infty} e_n = \frac{1}{3}$.

Aufgabe 21 Untersuchen Sie, ob die folgenden Folgen komplexer Zahlen (z_n), (w_n), (u_n), (v_n), (p_n) konvergieren und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert (mit Beweis):

a) $z_n := \frac{n}{n^3+2} + i\,\sqrt[n]{2}$.

b) $w_n := \frac{1}{n} \cdot (\cos(n \cdot 30°) + i \sin(n \cdot 30°))$.

c) $u_n := n \cdot (\cos(\frac{1}{n} \cdot 30°) + i \sin(\frac{1}{n} \cdot 30°))$.

d) $v_n := \left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$.

e) $p_n := \left(\frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2+2i}\right)^n$.

Lösung: Zu a) Aus der Vorlesung ist bekannt, dass eine Folge komplexer Zahlen (z_n) komplexer Zahlen genau dann konvergiert, wenn ihr Real- und Imaginärteil konvergieren. Wir betrachten diese also separat:
Für den Realteil von z_n gilt $Re(z_n) = \frac{n}{n^2+1} = \frac{1}{n+\frac{1}{n}}$. Der Nenner strebt gegen ∞, d.h. es gilt $\lim_{n\to\infty} Re(z_n) = 0$.
Für den Imaginärteil von z_n gilt $Im(z_n) = \sqrt[n]{2}$. Aus der Vorlesung ist bekannt, dass $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{2} = 1$. Also gilt $\lim_{n\to\infty} Im(z_n) = 1$. Insgesamt erhalten wir also:

$$\lim_{n\to\infty} z_n = \lim_{n\to\infty} Re(z_n) + i \lim_{n\to\infty} Im(z_n) = i.$$

Zu b) Da die Folge bereits in trigonometrischer Form gegeben ist, können wir ohne weiteres den Betrag ihrer Glieder ablesen: $|w_n| = \frac{1}{n}$. Folglich konvergeiert die Folge $(|w_n|)$ gegen Null. Aus der Vorlesung wissen wir, dass eine Folge genau dann eine Nullfolge ist, wenn die Folge ihrer Beträge eine Nullfolge ist. Somit folgt

$$\lim_{n\to\infty} w_n = 0.$$

Zu c) Auch hier können wir sofort den Betrag ablesen und sehen, dass dieser gegen Unendlich strebt. Da aber eine konvergente Folge beschränkt ist, kann (u_n) nicht konvergieren.

Zu d) Wir bringen die Folgenglieder zunächst in die algebraische Form, da wir dann besser mit ihnen umgehen können:

$$\frac{1+i}{1-i} = \frac{1+i}{1-i} \cdot \frac{1+i}{1+i} = \frac{1+2i+i^2}{1+1} = \frac{2i}{2} = i.$$

Da $i^2 = -1$ folgt

$$v_n = i^n = \begin{cases} i & \text{falls } n = 4k+1, \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2, \\ -i & \text{falls } n = 4k+3, \\ 1 & \text{falls } n = 4k+4. \end{cases} \qquad (k \in \mathbb{N}_0).$$

Man sieht also, dass die Folge (v_n) vier Häufungspunkte hat, nämlich $1, i, -1, -i$, und somit nicht konvergiert.

Zu e) Wir stellen zunächst $z := \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2+2i}$ in der algebraischen Form dar:

$$\begin{aligned} z &= \frac{(1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3})}{2+2i} = \frac{((1-\sqrt{3})+i(1+\sqrt{3}))(2-2i)}{(2+2i)(2-2i)} \\ &= \frac{4+i\,4\sqrt{3}}{8} = \frac{1+i\sqrt{3}}{2} = \frac{1}{2}+i\frac{\sqrt{3}}{2}. \end{aligned}$$

Wir können daraus sofort die trigonometrische Form von z ablesen, die für diese Aufgabe nützlich ist:

$$z = \cos(60^\circ) + i \cdot \sin(60^\circ).$$

Dann gilt für $p_n = z^n$:

$$p_n = \cos(n \cdot 60^\circ) + i \cdot \sin(n \cdot 60^\circ).$$

Da die die trigonometrischen Funktionen cos und sin periodisch mit der Periode 360° sind, folgt

$$p_n = p_{n+6} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Die Folge (p_n) hat also die sechs Häufungspunkte $p_1, p_2, p_3, p_4, p_5, p_6$, die auf dem Einheitskreis um 0 liegen (siehe Skizze) und ist somit nicht konvergent.