Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 8

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 22: Seien x_1 und c positive reelle Zahlen und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge:

$$x_{n+1} := \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right), \qquad n \in \mathbb{N}.$$

Zeigen Sie, dass die Folge (x_n) gegen $\sqrt{c}$ konvergiert.

Lösung: Wir nutzen den Satz von Bolzano-Weierstraß, um die Konvergenz der Folge zu beweisen. Wir gehen dazu wie folgt vor:

a) Wir zeigen, dass $\sqrt{c}$ eine untere Schranke von $\{x_n \mid n \geq 2\}$ ist.

b) Wir zeigen, dass (x_n) ab $n = 2$ monoton fällt.

c) Aus a) und b) folgt die Konvergenz der Folge (x_n). Wir berechnen den Grenzwert.

Zu a) Für alle $n \in \mathbb{N}$ folgt aus der Ungleichung zwischen arithmetischem und geometrischem Mittel:

$$x_{n+1} \quad = \quad \underbrace{\frac{x_n + \frac{c}{x_n}}{2}}_{arithmet.\,Mittel} \quad \geq \quad \underbrace{\sqrt{x_n \cdot \frac{c}{x_n}}}_{geometr.\,Mittel} \quad = \quad \sqrt{c}.$$

Also gilt $x_n \geq \sqrt{c}$ für alle $n \geq 2$.

Zu b) Wegen a) gilt für alle $n \geq 2$:

$$x_n - x_{n+1} \quad = \quad x_n - \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right) = \frac{1}{2}x_n - \frac{1}{2}\cdot\frac{c}{x_n} = \frac{1}{2x_n}\left(x_n^2 - c\right) \geq 0$$

Also gilt $x_{n+1} \leq x_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 2$, d.h. (x_n) ist ab $n \geq 2$ monoton fallend.

Zu c) Wir wissen nun, dass die Folge einen Grenzwert besitzt, da sie von unten beschränkt und monoton fallend ist[1]. Wir berechnen nun den Grenzwert.
Sei $x := \lim\limits_{n\to\infty} x_n$. Da $x_n \geq \sqrt{c} > 0$, ist $x \geq \sqrt{c} > 0$. Wir benutzen die rekursive Definition der Folge, um eine Gleichung für x herzuleiten. Wir bilden auf beiden Seiten der Gleichung

$$x_{n+1} = \frac{1}{2}\left(x_n + \frac{c}{x_n}\right)$$

den $\lim\limits_{n\to\infty}$ und erhalten mit Hilfe der Grenzwertsätze die folgende Gleichung für den Grenzwert x:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right).$$

[1] Dass die Folge erst für $n \geq 2$ monoton fallend ist macht nichts, da endlich viele Folgenglieder das Konvergenzverhalten nicht beeinflussen.

Diese Gleichung formen wir äquivalent um:

$$x = \frac{1}{2}\left(x + \frac{c}{x}\right) \iff 2x = x + \frac{c}{x} \iff x = \frac{c}{x} \iff x^2 = c.$$

Da $x > 0$, gilt $x = \sqrt{c}$. $\square$

Aufgabe 23

1. Sei (x_n) eine Folge reeller Zahlen und $b, c \in \mathbb{R}$.
   Gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n < b$, so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ so dass $x_n < b$ für alle $n \geq n_0$.
   Gilt $c < \liminf\limits_{n\to\infty} x_n$, so existiert ein $m_0 \in \mathbb{N}$ so dass $c < x_n$ für alle $n \geq m_0$.

2. Sei (a_n) eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie:

   a) $\liminf\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} \leq \liminf\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n}$.

   b) Wenn die Folge $(\frac{a_{n+1}}{a_n})$ gegen $a \in \mathbb{R}$ konvergiert, so konvergiert auch die Folge $(\sqrt[n]{a_n})$ gegen a.

3. Sei e die Eulerzahl. Zeigen Sie mit Hilfe von 2., dass

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}} = e.$$

Bevor wir mit der Lösung der Aufgabe beginnen, erinnern wir nochmal an die Definition von Limes Superior und Limes Inferior einer Folge (x_n) reeller Zahlen (siehe Vorlesung, steht nur teilweise im Skript (!)):

- Ist (x_n) beschränkt, so gilt $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n := \sup HP(x_n)$ und $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n := \inf HP(x_n)$.

- Ist (x_n) nicht beschränkt so gilt:

$$\limsup_{n\to\infty} x_n := \begin{cases} +\infty & \text{falls } (x_n) \text{ nicht von oben beschränkt,} \\ \sup HP(x_n) & \text{falls } (x_n) \text{ von oben beschränkt und } HP(x_n) \neq \emptyset, \\ -\infty & \text{falls } (x_n) \text{ von oben beschränkt und } HP(x_n) = \emptyset. \end{cases}$$

$$\liminf_{n\to\infty} x_n := \begin{cases} -\infty & \text{falls } (x_n) \text{ nicht von unten beschränkt,} \\ \inf HP(x_n) & \text{falls } (x_n) \text{ von unten beschränkt und } HP(x_n) \neq \emptyset, \\ +\infty & \text{falls } (x_n) \text{ von unten beschränkt und } HP(x_n) = \emptyset. \end{cases}$$

Lösung: Zu 1) Wir zeigen mit Hilfe der Definition von lim sup, dass es nur endlich viele Folgenglieder geben kann, die größer oder gleich b sind:
Angenommen, es gibt unendlich viele Folgenglieder $x_{n_1}, x_{n_2}, x_{n_3}, \ldots$ mit $x_{n_j} \geq b$. Die Folge (x_{n_j}) ist von oben beschränkt, denn sonst wäre auch (x_n) nicht von oben beschränkt und damit $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = +\infty$. Also besitzt (x_{n_j}) nach dem Satz von Bolzano/Weierstrass eine konvergente Teilfolge $(x_{n_{j_k}})$, deren Grenzwert $\geq b$ sein muß, da $x_{n_{j_k}} \geq b$ für alle $k \in \mathbb{N}$. $(x_{n_{j_k}})$ ist auch Teilfolge von (x_n) und somit hätte (x_n) einen Häufungspunkt, der größer oder gleich b ist. Dies widerspricht der Voraussetzung, dass $\limsup\limits_{n\to\infty} x_n = \sup HP(x_n) < b$.

Mit Hilfe der Definition von $\liminf$ zeigt man auf komplett analoge Weise, dass es nur endlich viele Folgenglieder geben kann mit $x_n \leq c$.

Zu 2a) Die mittlere Ungleichung folgt direkt aus der Definition von $\liminf$ und $\limsup$. Wir zeigen die Ungleichung für $\limsup$:
Ist $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = +\infty$, dann gilt $\limsup\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ offensichtlich. Sei nun $L := \limsup\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} \in \mathbb{R}$. Da alle Zahlen $\frac{a_{n+1}}{a_n}$ positiv sind, gilt $L \geq 0$. Wir betrachten eine beliebige reelle Zahl b mit $0 \leq L < b$. Dann existiert nach 1. ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $\frac{a_{n+1}}{a_n} < b$ für alle $n \geq n_0$. Dann gilt für alle $n \geq n_0$:

$$\begin{aligned}
\sqrt[n]{a_n} &= \Big(\underbrace{\frac{a_n}{a_{n-1}} \cdot \frac{a_{n-1}}{a_{n-2}} \cdot \frac{a_{n-2}}{a_{n-3}} \cdot \ldots \cdot \frac{a_{n_0+1}}{a_{n_0}}}_{(n-n_0)\ \textit{Faktoren}} \cdot a_{n_0}\Big)^{\frac{1}{n}} \\
&< \Big(b^{n-n_0} \cdot a_{n_0}\Big)^{\frac{1}{n}} \\
&= b \cdot \sqrt[n]{b^{-n_0} \cdot a_{n_0}}. \qquad\qquad (*)
\end{aligned}$$

Für die feste Zahl $q := b^{-n_0} \cdot a_{n_0}$ konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{q})$ gegen 1, und damit konvergiert auch jede ihrer Teilfolgen gegen 1. Außerdem folgt, dass $(\sqrt[n]{a_n})$ beschränkt ist, d.h. $HP(\sqrt[n]{a_n}) \neq \emptyset$. Dann folgt aus $(*)$, dass der Grenzwert jeder konvergenten Teilfolge von $(\sqrt[n]{a_n})$ kleiner oder gleich b ist. Wir erhalten also, dass $HP(\sqrt[n]{a_n}) \subset (-\infty, b]$ und folglich

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} = \sup HP(\sqrt[n]{a_n}) \leq b.$$

Dies gilt für alle $b > \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} =: L$. Wählen wir nun $b = L + \frac{1}{m}$ für $m \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq L + \frac{1}{m} \qquad \text{für alle } m \in \mathbb{N}.$$

Betrachten wir den Grenzwert $m \to \infty$ auf beiden Seiten, dann folgt

$$\limsup_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n} \leq \limsup \frac{a_{n+1}}{a_n} = L.$$

Den Beweis der Ungleichung für $\liminf$ führt man mit Hilfe von 1. und der $(*)$ entsprechenden Abschätzung auf analoge Weise.

Zu 2b) Aus der Vorlesung wissen wir: Gilt für eine Folge reeller Zahlen (x_n), dass $\liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$, dann ist (x_n) konvergent und $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = \liminf\limits_{n\to\infty} x_n = \limsup\limits_{n\to\infty} x_n$. Deshalb folgt die Behauptung aus 2a).

Zu 3) Wir betrachten die Folge (a_n) mit $a_n := \frac{n^n}{n!}$. Dann gilt $\sqrt[n]{a_n} = \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$. Wir berechnen:

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{n^n} = \frac{(n+1)^n(n+1)\cdot n!}{n^n \cdot (n+1)!} = \Big(\frac{n+1}{n}\Big)^n \cdot \frac{(n+1)!}{(n+1)!} = \Big(1 + \frac{1}{n}\Big)^n.$$

Folglich gilt

$$\lim_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n} = \lim_{n\to\infty}\Big(1+\frac{1}{n}\Big)^n = e$$

und die Behauptung folgt aus 2b).

Aufgabe 24

a) Sei (z_n) eine Folge in $\mathbb{R}$ oder in $\mathbb{C}$ mit folgender Eigenschaft:
Es existiert eine reelle Zahl q mit $0 < q < 1$, so dass

$$|z_{n+1} - z_n| < q \cdot |z_n - z_{n-1}| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},\ n \geq 2. \qquad (*)$$

Zeigen Sie, dass (z_n) konvergent ist.

b) Sei $x_1 \in \mathbb{R}$ und (x_n) die folgende rekursiv definierte Folge reeller Zahlen:

$$x_{n+1} := \frac{2x_n + 1}{3}, \qquad n \in \mathbb{N}. \qquad (**)$$

Untersuchen Sie (x_n) auf Konvergenz und bestimmen Sie ggf. den Grenzwert.

Lösung: Zu a) Wir zeigen, dass (z_n) eine Cauchy-Folge ist. Dann konvergiert sie nach dem Cauchy-Kriterium. Wir schätzen dazu den Abstand $|z_m - z_n|$ ab:
Durch sukzessives Anwenden der Voraussetzung erhält man für $n \geq 2$:

$$|z_{n+1} - z_n| < q \cdot |z_n - z_{n-1}| < q^2 \cdot |z_{n-1} - z_{n-2}| < \ldots < q^{n-1} \cdot |z_2 - z_1|.$$

Für $m > n \geq 2$ folgt daraus mit der Dreiecksungleichung und der Formel für die geometrische Summe:

$$\begin{aligned}
|z_m - z_n| &\overset{\triangle}{\leq} |z_m - z_{m-1}| + |z_{m-1} - z_{m-2}| + |z_{m-2} - z_{m-3}| + \ldots + |z_{n+1} - z_n| \\
&< \left(q^{m-2} + q^{m-3} + \ldots + +q^n + q^{n-1}\right) \cdot |z_2 - z_1| \\
&= q^{n-1} \cdot \left(q^{m-n-1} + q^{m-n-2} + \ldots + q + 1\right) \cdot |z_2 - z_1| \\
&= q^{n-1} \cdot \left(\sum_{k=0}^{m-n-1} q^k\right) \cdot |z_2 - z_1| \\
&\overset{geom.Summe}{=} q^{n-1} \cdot \frac{1 - q^{m-n}}{1 - q} \cdot |z_2 - z_1| \\
&< q^{n-1} \cdot \frac{1}{1 - q} \cdot |z_2 - z_1| \\
&= q^n \cdot \frac{1}{q(1 - q)} \cdot |z_2 - z_1|.
\end{aligned}$$

Aus der Vorausetzung an (z_n) folgt, dass $z_1 \neq z_2$, d.h. $|z_2 - z_1| \neq 0$. Da $0 < q < 1$, ist (q^n) eine Nullfolge (siehe Vorlesung), d.h.für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$q^n < \varepsilon \cdot \frac{q(1 - q)}{|z_2 - z_1|} \qquad \text{für alle } n \geq n_0.$$

Somit gilt: Für alle $\varepsilon > 0$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass

$$|z_m - z_n| < \varepsilon \qquad \text{für alle } n, m \in \mathbb{N} \text{ mit } m \geq n \geq n_0\ .$$

Dies zeigt, dass (z_n) eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. $\square$.

Zu b) Wir benutzen das Kriterium in a). Aus der rekursiven Definition von (x_n) folgt:

$$3x_{n+1} - 2x_n = 1 = 3x_n - 2x_{n-1} \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Wir ziehen auf beiden Seiten der Gleichung x_n ab und erhalten

$$3x_{n+1} - 3x_n = 2x_n - 2x_{n-1},$$

also

$$|x_{n+1} - x_n| = \frac{2}{3} \cdot |x_n - x_{n-1}| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}, n \geq 2.$$

Da $0 < \frac{2}{3} < q := \frac{3}{4} < 1$ folgt nun die Konvergenz von (x_n) aus a).

Bemerkung: a) gilt offensichtlich auch, wenn man in der Ungleichung (*) $<$ durch $\leq$ ersetzt. Dann kann man $q = \frac{2}{3}$ setzen).

Den Grenzwert der Folge (x_n) bestimmen wir, in dem wir auf die Gleichung (**) rechts und links den Grenzwert $n \to \infty$ bilden und die Grenzwertsätze anwenden:

$$x := \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{2x_n + 1}{3} = \frac{2\lim_{n\to\infty} x_n + 1}{3} = \frac{2x+1}{3}.$$

Aus dieser Gleichung ergibt sich der Grenzwert $x = 1$. $\square$.