Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 9

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 25: Untersuchen Sie, ob folgende Reihen konvergent, absolut konvergent oder divergent sind:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k(k+2)}$

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k \cdot \sqrt[3]{k}}$

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$

d) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k^2}{\left(4+\frac{1}{k}\right)^k}$

e) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (-1)^k \cdot \frac{3^k k!}{k^k}$

f) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \binom{2+k}{k}^{-\frac{1}{k}}$

Lösung: Zu a) Für $a_k := \frac{1}{k(k+2)}$ gilt $|a_k| \leq \frac{1}{k^2}$. Die Zeta-Reihe $\zeta(2) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^2}$ ist also eine konvergente Majorante für die zu untersuchende Reihe. Folglich ist die Reihe a) nach dem Majorantenkriterium absolut konvergent und somit auch konvergent. (Da alle Reihenglieder positiv sind besteht hier kein Unterschied zwischen der Reihe und der Reihe der Beträge).

Zu b) Es gilt $\frac{1}{k \cdot \sqrt[3]{k}} = \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$. Die Reihe b) ist also die Zeta-Reihe $\zeta(\frac{4}{3}) = \sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{k^{\frac{4}{3}}}$ und damit wieder (absolut) konvergent, da $\frac{4}{3} > 1$.

Zu c) Wir untersuchen zuerst die absolute Konvergenz.
Sei $a_k := (-1)^k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1})$. Dann gilt $|a_k| = \sqrt{k+1} - \sqrt{k}$. Folglich ist die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_k| = \sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ eine Teleskopreihe. Da die Folge $(\sqrt{k})$ nicht konvergiert, konvergiert auch die Reihe $\sum\limits_{k=1}^{\infty} (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$ nicht (siehe Übung). D.h. die Reihe c) ist nicht absolut konvergent.
Um die Konvergenz der Reihe c) zu überprüfen, nutzen wir das Leibniz-Kriterium:
Sei $d_k := (\sqrt{k+1} - \sqrt{k})$. Dann gilt:

$$d_k = \frac{(\sqrt{k+1} - \sqrt{k})(\sqrt{k+1} + \sqrt{k})}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}} = \frac{1}{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}.$$

Somit ist die Folge (d_k) eine Nullfolge. Außerdem gilt:

$$\frac{d_{k+1}}{d_k} = \frac{\sqrt{k+1} + \sqrt{k}}{\sqrt{k+2} + \sqrt{k+1}} < 1, \qquad \text{d.h. } d_{k+1} < d_k \text{ für alle } k \in \mathbb{N}.$$

Folglich ist (d_k) eine monoton fallende Nullfolge positiver reeller Zahlen. Nach dem Leibniz-Kriterium konvergiert somit die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k+1} - \sqrt{k}) = -\sum_{k=1}^{\infty} (-1)^k(\sqrt{k} - \sqrt{k+1}).$$

Folglich ist auch die Reihe c) konvergent.

Zu d) Sei $a_k := \frac{k^2}{(4+\frac{1}{k})^k}$. Dann gilt:

$$\sqrt[k]{|a_k|} = \frac{(\sqrt[k]{k})^2}{4+\frac{1}{k}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{4} < 1.$$

Nach dem Wurzelkriterium ist die Reihe d) (absolut) konvergent.

Zu e) Sei $a_k := (-1)^k \frac{3^k k!}{k^k}$. Dann gilt:

$$\frac{|a_{k+1}|}{|a_k|} = \frac{3^{k+1}(k+1)!}{(k+1)^{k+1}} \cdot \frac{k^k}{3^k k!} = \frac{3(k+1)}{k+1}\left(\frac{k}{k+1}\right)^k = 3\cdot \frac{1}{\left(\frac{k+1}{k}\right)^k} = 3\cdot \frac{1}{\left(1+\frac{1}{k}\right)^k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{3}{e} > 1.$$

Folglich ist die Reihe e) nach dem Quotientenkriterium divergent.

Zu f) Sei $a_k := \binom{2+k}{k}^{-\frac{1}{k}}$. Dann gilt:

$$|a_k| = \left(\frac{(k+2)!}{k!2!}\right)^{-\frac{1}{k}} = \left(\frac{(k+2)(k+1)}{2}\right)^{-\frac{1}{k}} = \frac{\sqrt[k]{2}}{\sqrt[k]{k+2}\cdot\sqrt[k]{k+1}} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{1\cdot 1} = 1.$$

(Für die Grenzwertaussage haben wir die Grenzwertsätze und die Beispiele aus der Vorlesung bzw. Übung benutzt: $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{a} = 1$ für alle $a \in \mathbb{R}^+$ und $\lim_{k\to\infty} \sqrt[k]{k+m} = 1$ für alle $m \in \mathbb{N}_0$.)
Folglich ist die Folge (a_k) keine Nullfolge und somit ist die Reihe f) divergent.

Aufgabe 26: Zeigen Sie, dass die folgenden Reihen konvergieren und bestimmen Sie ihre Werte:

a) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)}$.

b) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5\cdot 3^k}$.

c) $\sum\limits_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k}$.

Lösung: Zu a) Für die n.-Partialsumme der Reihe (Teleskopreihe (!)) gilt:

$$\begin{aligned}\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} &= \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{3}\left(\frac{1}{3k-2} - \frac{1}{3k+1}\right) = \frac{1}{3}\cdot\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{3(k-1)+1} - \frac{1}{3k+1}\right)\\ &= \frac{1}{3}\left(1 - \frac{1}{3n+1}\right) \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3}.\end{aligned}$$

Also ist die Reihe konvergent und für ihren Wert gilt:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{(3k-2)(3k+1)} = \frac{1}{3}.$$

Zu b) Wir benutzen die Konvergenzeigenschaften und die Grenzwertformel für die geometrische Reihe und erhalten:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{2^{k+1}}{5 \cdot 3^k} = \frac{2}{5} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k = \frac{2}{5} \cdot \left(\sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{2}{3}\right)^k - 1 \right) = \frac{2}{5} \cdot \left(\frac{1}{1-\frac{2}{3}} - 1 \right) = \frac{4}{5}.$$

Zu c) Nach dem Quotientenkriterium konvergiert die Reihe, denn:

$$\frac{\frac{k+1}{3^{k+1}}}{\frac{k}{3^k}} = \frac{1}{3} \cdot \frac{k+1}{k} \overset{k\to\infty}{\longrightarrow} \frac{1}{3} < 1.$$

Deshalb können wir für ihren Wert unter Benutzung der Formel für die geometrische Reihe die folgende Gleichung aufstellen:

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} &= \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{3^k} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{3^k} = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-1}{3^{k-1}} + \left(\frac{1}{1-\frac{1}{3}} - 1 \right) = \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=0}^{\infty} \frac{k}{3^k} + \frac{1}{2} \\ &= \frac{1}{3} \cdot \sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} + \frac{1}{2}. \end{aligned}$$

Stellen wir diese Gleichung nach dem gesuchten Reihenwert um, so erhalten wir:

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k}{3^k} = \frac{3}{4}.$$

Aufgabe 27: Bestimmen Sie die Konvergenzradien folgender komplexer Potenzreihen:

a) $P_1(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n} z^n.$

b) $P_2(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} \cdot (z-2)^n.$

c) $P_3(z) = \sum\limits_{n=1}^{\infty} n^4 \cdot 4^n (z+1)^n.$

d) *Binomialreihe*:
$B_a(z) := \sum\limits_{n=0}^{\infty} \binom{a}{n} z^n$, wobei $a \in \mathbb{R}$.

Lösung: Zu a) Für $a_n := \frac{(-1)^{n-1}}{n}$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{n}{n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 1.$$

Also ist der Konvergenzradius von $P_1(z)$ gleich 1.

Zu b) Für $a_n := \binom{2n}{n}$ gilt:

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \frac{(2n+2)!}{(n+1)!(n+1)!} \cdot \frac{n!n!}{(2n)!} = \frac{(2n+2)(2n+1)}{(n+1)(n+1)} = \frac{4n^2+6n+2}{n^2+2n+1} \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Folglich ist der Konvergenzradius der Potenzreihe gleich $\frac{1}{4}$.

Zu c) Für $a_n := n^4 \cdot 4^n$ gilt:

$$\sqrt[n]{|a_n|} = \left(\sqrt[n]{n}\right)^4 \cdot 4 \overset{n\to\infty}{\longrightarrow} 4.$$

Also ist der Konvergenzradius gleich $\frac{1}{4}$.

Zu d) Sei $a_n := \binom{a}{n}$. Wir unterscheiden hier 2 Fälle:

- Ist $a =: N$ eine natürliche Zahl, so gilt nach Definition der Binomialkoeffizienten $a_n = 0$ für alle $n > N$. Damit ist die Partialsummenfolge der Potenzreihe $B_N(z)$ ab dem Index N konstant. Die Binomialreihe $B_N(z)$ konvergiert somit für alle $z \in \mathbb{C}$, d.h. der Konvergenzradius ist $+\infty$. Für den Wert von $B_N(z)$ erhalten wir mit der Binomischen Formel:

$$B_N(z) = \sum_{n=0}^{\infty} \binom{N}{n} z^n = \sum_{n=0}^{N} \binom{N}{n} z^n = (z+1)^N.$$

- Sei nun $a \notin \mathbb{N}$. Dann sind alle Koeffizienten a_n von Null verschieden und wir erhalten

$$\frac{|a_{n+1}|}{|a_n|} = \left| \frac{a(a-1)(a-2)\cdot \ldots \cdot (a-n)}{(n+1)!} \cdot \frac{n!}{a(a-1)(a-2)\cdot \ldots \cdot (a-(n-1))} \right| = \left| \frac{a-n}{n+1} \right|.$$

  Da

$$\lim_{n\to\infty} \left| \frac{a-n}{n+1} \right| = \left| \lim_{n\to\infty} \frac{a-n}{n+1} \right| = |-1| = 1,$$

  ist der Konvergenzradius der Potzenreihe $B_a(z)$ in diesen Fall gleich 1.