Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 10

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 28

Seien a, b positive reelle Zahlen mit $a, b \neq 1$. Zeigen Sie, dass für alle $x \in \mathbb{R}^+$ gilt:

a) $\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}$.

b) $\frac{\log_a(x)}{c} = \log_{a^c}(x)$ für alle $c \in \mathbb{R}, c \neq 0$.

c) $\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x)$.

Lösung: Wir benutzen zur Lösung der Aufgabe die Potenzgesetze und die Injektivität der Exponentalfunktion zur Basis $a \neq 1$.

Zu a) Es gilt:

$$a^{\log_a(x)} = x = b^{\log_b(x)} = b^{\log_b(a) \cdot \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = \left(b^{\log_b(a)}\right)^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}} = a^{\frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}}.$$

Da die Exponentialfunktion zur Basis a injektiv ist ($a \neq 1$), folgt

$$\log_a(x) = \frac{\log_b(x)}{\log_b(a)}.$$

Zu b) Es gilt:

$$a^{\frac{\log_a(x)}{c}} = \left(a^{\log_a(x)}\right)^{\frac{1}{c}} = x^{\frac{1}{c}} = \left((a^c)^{\log_{a^c}(x)}\right)^{\frac{1}{c}} = (a^c)^{\frac{1}{c} \cdot \log_{a^c}(x)} = a^{c \cdot \frac{1}{c} \cdot \log_{a^c}(x)} = a^{\log_{a^c}(x)}.$$

Da die Exponentialfunktion zur Basis a injektiv ist ($a \neq 1$), folgt

$$\frac{\log_a(x)}{c} = \log_{a^c}(x).$$

Zu c) Es gilt:

$$a^{\log_a(x)} = x = \left(\frac{1}{a}\right)^{\log_{\frac{1}{a}}(x)} = (a^{-1})^{\log_{\frac{1}{a}}(x)} = a^{-\log_{\frac{1}{a}}(x)}.$$

Da die Exponentialfunktion zur Basis a injektiv ist ($a \neq 1$), folgt

$$\log_a(x) = -\log_{\frac{1}{a}}(x).$$

Aufgabe 29

Bestimmen Sie alle reellen Zahlen $x \in \mathbb{R}$, die jeweils die folgende Gleichung lösen:

a) $2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2$.

b) $2^{(3^x)} = 3^{(4^x)}$.

c) $2^x + 3^{x+3} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0$.

Lösung:

Zu a) Wir setzen $y := \log_5(x)$. Dann gilt $x = 5^y$. Wegen der Bijektivität der Logarithmusfunktion $\log_5$ sind die folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
2(\log_5 x)^2 + \log_5(x^3) = 2 \quad &\iff \quad 2(\log_5 x)^2 + 3\log_5(x) = 2 \\
&\iff \quad 2y^2 + 3y = 2 \\
&\iff \quad y^2 + \frac{3}{2}y - 1 = 0 \\
&\iff \quad y = -\frac{3}{4} \pm \sqrt{\frac{9}{16} + 1} = -\frac{3}{4} \pm \frac{5}{4} \\
&\iff \quad y = \frac{1}{2} \text{ oder } y = -2 \\
&\iff \quad x = 5^{\frac{1}{2}} = \sqrt{5} \text{ oder } x = 5^{-2} = \frac{1}{25}.
\end{aligned}$$

Die Gleichung a) hat also genau 2 Lösungen, nämlich $x = \sqrt{5}$ und $x = \frac{1}{25}$.

Zu b) Die Zahlen $2^{(3^x)}$ und $3^{(4^x)}$ sind positiv. Da die Logarithmusfunktion $\ln : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ bijektiv ist, sind die folgenden Gleichungen äquivalent:

$$\begin{aligned}
2^{(3^x)} = 3^{(4^x)} \quad &\iff \quad \ln 2^{(3^x)} = \ln 3^{(4^x)} \\
&\iff \quad 3^x \cdot \ln(2) = 4^x \cdot \ln(3) \\
&\iff \quad \left(\frac{3}{4}\right)^x = \frac{\ln(3)}{\ln(2)} \\
&\iff \quad \ln\left(\frac{3}{4}\right)^x = \ln\frac{\ln(3)}{\ln(2)} = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) \\
&\iff \quad x \cdot \ln\frac{3}{4} = \ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2)) \\
&\iff \quad x = \frac{\ln(\ln(3)) - \ln(\ln(2))}{\ln(3) - \ln(4)}.
\end{aligned}$$

Zu c) Es gilt:

$$\begin{aligned}
2^x + 3^{x+3} - 2^{x+2} - 3^{x+1} &= 2^x + 3^x \cdot 3^3 - 2^x \cdot 2^2 - 3^x \cdot 3 = 2^x \cdot (1-4) + 3^x \cdot (27-3) \\
&= -3 \cdot 2^x + 24 \cdot 3^x.
\end{aligned}$$

Folglich gilt:

$$\begin{aligned}
2^x + 3^{x+3} - 2^{x+2} - 3^{x+1} = 0 \quad &\Longleftrightarrow \quad 24 \cdot 3^x = 3 \cdot 2^x \\
&\Longleftrightarrow \quad 8 = \left(\frac{2}{3}\right)^x \\
&\Longleftrightarrow \quad \ln(8) = \ln\left(\frac{2}{3}\right)^x = x \cdot \ln\frac{2}{3} = x \cdot (\ln(2) - \ln(3)) \\
&\Longleftrightarrow \quad x = \frac{\ln(8)}{\ln(2) - \ln(3)}.
\end{aligned}$$

Aufgabe 30

a) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Wurzelfunktion $\sqrt[3]{} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ auf $\mathbb{R}^+$ stetig ist. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ und $x_0 \in \mathbb{R}^+$ ein $\delta > 0$ an, so dass gilt:

$$\forall\, x \in \mathbb{R}^+ \text{ mit } |x - x_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |\sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}| < \varepsilon.$$

(*Tipp:* Benutzen Sie die Abschätzung aus Aufgabe 15 b))

b) Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Funktion $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ mit $f(z) := z^2$ auf $\mathbb{C}$ stetig ist. Geben Sie zu jedem $\varepsilon > 0$ und $z_0 \in \mathbb{C}$ ein $\delta > 0$ an, so dass gilt:

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \;\text{ mit }\; |z - z_0| < \delta \quad \Longrightarrow \quad |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$

(*Tipp:* Benutzen Sie $z^2 - z_0^2 = (z - z_0)(z + z_0)$ und die Dreiecks-Ungleichung $|z + z_0| = |(z - z_0) + 2z_0| \leq |z - z_0| + 2|z_0|$.)

Lösung:

Zu a) Seien $x_0 \in \mathbb{R}^+$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Aus Aufgabe 15b) wissen wir, dass

$$|\, \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\, | \leq \sqrt[3]{|x - x_0|} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

Für alle $x \in \mathbb{R}^+$ mit $|x - x_0| < \varepsilon^3$ folgt somit

$$|\, \sqrt[3]{x} - \sqrt[3]{x_0}\, | \leq \sqrt[3]{|x - x_0|} < \sqrt[3]{\varepsilon^3} = \varepsilon.$$

Somit erfüllt $\delta := \varepsilon^3$ die Forderung und ist sogar unabhängig von x_0.
(D.h. die Funktion $\sqrt[3]{\cdot} : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$ ist sogar gleichmäßig stetig).

Zu b) Es gilt:

$$\begin{aligned}
|z^2 - z_0^2| \quad &= \quad |(z - z_0) \cdot (z + z_0)| \\
&= \quad |z - z_0| \cdot |z + z_0| \\
&= \quad |z - z_0| \cdot |z - z_0 + 2z_0| \\
&\overset{\triangle-Ungl.}{\leq} \quad |z - z_0| \cdot (|z - z_0| + 2|z_0|) \\
&= \quad |z - z_0|^2 + 2|z_0| \cdot |z - z_0|. \qquad (*)
\end{aligned}$$

Seien nun $z_0 \in \mathbb{C}$ und $\varepsilon > 0$ gegeben. Wir setzen $w := |z - z_0|$ und bestimmen alle $w \geq 0$, so dass

$$w^2 + 2|z_0|w < \varepsilon. \qquad (**)$$

Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(w) := w^2 + 2|z_0|w - \varepsilon$ ist eine nach oben geöffnete Parabel mit der negativen Nullstelle $w_0 := -|z_0| - \sqrt{|z_0|^2 + \varepsilon}$ und der positiven Nullstelle $w_1 = -|z_0| + \sqrt{|z_0|^2 + \varepsilon}$. Folglich gilt die Ungleichung (**) für alle w mit $0 \leq w < w_1$.
Für $\delta := -|z_0| + \sqrt{|z_0|^2 + \varepsilon}$ folgt also aus (*) und (**)

$$\forall\, z \in \mathbb{C} \text{ mit } |z - z_0| < \delta \implies |z^2 - z_0^2| < \varepsilon.$$