Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 11

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 31

a) Für zwei Funktionen $f, g : D \to \mathbb{R}$ sei das Minimum $\min(f,g) : D \to \mathbb{R}$ definiert durch

$$\min(f,g)(z) := \min\{f(z), g(z)\} \quad \forall\, z \in D.$$

Zeigen Sie: Sind f und g stetig, so ist auch $\min(f,g)$ stetig.

Tipp: Zeigen Sie, dass $\min(f,g) = \frac{1}{2}\big(f + g - |f-g|\big)$ und benutzen Sie dann Sätze aus der Vorlesung).

b) Zeigen Sie, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x \in \mathbb{Q} \\ 1 & \text{falls } x \in \mathbb{R} \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist.

c) Die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ sei definiert durch

$$f(x) := \begin{cases} \frac{x^3-7x+6}{x^2-3x+2} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 2 \\ A & \text{falls } x = 1 \\ B & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Kann man die reellen Zahlen A und B so wählen, dass f stetig ist?

Lösung: Zu a) Wir folgen dem Hinweis und zeigen zuerst:

$$\min(f,g) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|). \qquad (*)$$

1. Fall: Sei $x \in D$ und $f(x) \geq g(x)$. Dann gilt:

- $\min\{f(x), g(x)\} = g(x)$,
- $\frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) - (f(x) - g(x)) = g(x)$.

Folglich gilt $\min(f,g)(x) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)(x)$.

2. Fall: Sei $x \in D$ und $f(x) < g(x)$. Dann gilt:

- $\min\{f(x), g(x)\} = f(x)$,
- $\frac{1}{2}(f(x) + g(x) - |f(x) - g(x)|) = \frac{1}{2}(f(x) + g(x) + (f(x) - g(x)) = f(x)$.

Folglich gilt $\min(f,g)(x) = \frac{1}{2}(f + g - |f-g|)(x)$.

Damit ist $(*)$ bewiesen. Wir wissen aus der Vorlesung, dass die Summe, die Differenz, der Betrag, das Produkt stetiger Funktionen stetig sind. Die Funktion $\min(f,g)$ entsteht nach a) aus f und g durch diese algebraischen Operationen und ist somit stetig.

Zu b) Wir wollen das Folgenkriterium für die Stetigkeit benutzen und erinnern deshalb zunächst nochmal an einen Fakt, den wir aus der Vorlesung/Übung bereits kennen:

Sei $x \in \mathbb{R}$. Dann gibt es eine Folge rationaler Zahlen (q_n), die gegen x konvergiert, und eine Folge irrationaler Zahlen (r_n), die gegen x konvergiert.

Beweis: Wir wissen, dass in jedem offenen Intervall $(a, b) \subset \mathbb{R}$ sowohl eine rationale Zahl als auch eine irrationale Zahl liegt. Die erste Aussage wurde in der VL bewiesen ($\mathbb{Q}$ ist dicht in $\mathbb{R}$). Die zweite Aussage gilt, da (a, b) eine überabzählbare Menge ist (gleichmächtig zu $\mathbb{R}$), aber $(a, b) \cap \mathbb{Q}$ nur abzählbar ist.
Sei nun $x \in \mathbb{R}$ fixiert. Dann gibt es für jedes $n \in \mathbb{N}$ im Intervall $(x - \frac{1}{n}, x)$ eine rationale Zahl q_n und eine irrationale Zahl r_n. Wir erhalten also eine Folge (q_n) in $\mathbb{Q}$ und eine Folge (r_n) in $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$, so dass

$$x - \frac{1}{n} < q_n < x \quad \text{und} \quad x - \frac{1}{n} < r_n < x \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}.$$

Nach den Sandwich-Lemma folgt daraus, dass die Folgen (q_n) und (r_n) gegen x konvergieren. $\square$.

Wir zeigen nun, dass die Funktion f in keinem Punkt $x_0 \in \mathbb{R}$ stetig ist:
Ist x_0 rational, dann betrachten wir eine Folge irrationaler Zahlen (r_n) mit $r_n \to x_0$. Dann gilt $f(r_n) = 1$, aber $f(x_0) = 0$, d.h. f ist nach dem Folgenkriterium in x_0 nicht stetig.
Ist x_0 irrational, dann betrachten wir eine Folge rationaler Zahlen (q_n) mit $q_n \to x_0$. Dann gilt $f(q_n) = 0$, aber $f(x_0) = 1$, d.h. f ist nach dem Folgenkriterium in x_0 nicht stetig.

Zu c) Wir betrachten die Polynome $P(x) := x^3 - 7x + 6$ und $Q(x) := x^2 - 3x + 2$. Dann gilt $f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)}$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$.
Das Polynom $Q(x)$ hat die reellen Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ und läßt sich in die Linearfaktoren $Q(x) = (x-1)(x-2)$ zerlegen (siehe auch Satz 16, Kap.2 der VL). Folglich ist $Q(x) \neq 0$ für alle $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$. Die rationale Funktion $\frac{P}{Q} : \mathbb{R} \setminus \{1, 2\} \to \mathbb{R}$ ist somit stetig. D.h. die Funktion f ist in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{1, 2\}$ stetig.
Wir müssen nun noch die Stetigkeit von f in den Punkten $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ untersuchen. Dazu prüfen wir, ob $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$ auch Nullstellen des Polynoms $P(x)$ sind. Das ist offensichlich der Fall. Man kann also auch von $P(x)$ die Linearfaktoren $(x-1)(x-2)$ abspalten und erhält (z.B. durch Polynomdivision)

$$P(x) = x^3 - 7x + 6 = (x-1)(x-2)(x+3).$$

Folglich gilt für $x \neq 1$ und $x \neq 2$:

$$f(x) = \frac{P(x)}{Q(x)} = \frac{x^3 - 7x + 6}{x^2 - 3x + 2} = x + 3.$$

Damit existiert der Grenzwert von f in $x_1 = 1$ und in $x_2 = 2$ und es gilt:

$$\lim_{x \to 1} f(x) = 4 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x \to 2} f(x) = 5.$$

Somit ist f in $x_1 = 1$ stetig, wenn $A = 4$, und in $x_2 = 2$ stetig, wenn $B = 5$.

Aufgabe 32

Es seien $f, g : D \to \mathbb{C}$ zwei Funktionen. Zeigen Sie:

a) Sind f und g gleichmäßig stetig, so ist $f + g$ gleichmäßig stetig.

b) Sind f und g lipschitzstetig, so ist $f + g$ lipschitzstetig.

Lösung:

Zu a) Sei $\varepsilon > 0$. Wir wollen zeigen, dass ein $\delta > 0$ existiert, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|x - y| < \delta \implies |(f+g)(x) - (f+g)(y)| < \varepsilon.$$

Da f und g gleichmäßig stetig sind, existieren $\delta_f > 0$ und $\delta_g > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|x - y| < \delta_f \implies |f(x) - f(y)| < \frac{\varepsilon}{2} \quad \text{und} \quad |x - y| < \delta_g \implies |g(x) - g(y)| < \frac{\varepsilon}{2}. \qquad (*)$$

Wir setzen nun $\delta := \min\{\delta_f, \delta_g\}$ und erhalten für alle $x, y \in D$ mit $|x - y| < \delta$:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\overset{\triangle}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\overset{(*)}{<} \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon. \end{aligned}$$

Folglich ist $f + g$ gleichmäßig stetig.

Zu b) Wir müssen ein $L > 0$ finden, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|(f+g)(x) - (f+g)(y)| \leq L \cdot |x - y|.$$

Da f und g lipschitzstetig sind, gibt es Lipschitz-Konstanten $L_f > 0$ und $L_g > 0$, so dass für alle $x, y \in D$ gilt:

$$|f(x) - f(y)| \leq L_f \cdot |x - y| \quad \text{und} \quad |g(x) - g(y)| \leq L_g \cdot |x - y| \qquad (**).$$

Wir setzen nun $L := L_f + L_g$ und erhalten für alle $x, y \in D$:

$$\begin{aligned} |(f+g)(x) - (f+g)(y)| &= |f(x) + g(x) - f(y) - g(y)| \\ &\overset{\triangle}{\leq} |f(x) - f(y)| + |g(x) - g(y)| \\ &\overset{(**)}{\leq} L_f \cdot |x - y| + L_g \cdot |x - y| \\ &= (L_f + L_g) \cdot |x - y| = L \cdot |x - y|. \end{aligned}$$

Also ist $f + g$ lipschitzstetig.

Aufgabe 33: Untersuchen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der bisherigen Vorlesung (!), ob die Grenzwerte der folgenden reellen Funktionen existieren und berechnen Sie diese gegebenenfalls:

a) $\lim\limits_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right) \cdot \frac{1}{x-1}$.

b) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x^2+3x+2} - x)$.

c) $\lim\limits_{x\to e} \frac{x^{(x^x)}}{(x^x)^x}$, wobei e die Eulerzahl ist.

Lösung: Zu a) Der Term in der Klammer konvergiert gegen Null, für den 2. Faktor existiert kein Grenzwert (auch kein uneigentlicher). Wir können also nicht ohne Weiteres die Grenzwertsätze anwenden. Stattdessen formen wir die Funktion zunächst um:

$$\begin{aligned}\left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right) \cdot \frac{1}{x-1} &= \frac{3x+5-2(x+3)}{(x+3)(3x+5)} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{x-1}{(x+3)(3x+5)} \cdot \frac{1}{x-1} \\ &= \frac{1}{(x+3)(3x+5)}.\end{aligned}$$

Mit den Grenzwertsätzen folgt nun, da die einzelnen Grenzwerte alle existieren, dass

$$\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{x+3} - \frac{2}{3x+5}\right) \cdot \frac{1}{x-1} = \lim_{x\to 1} \frac{1}{(x+3)(3x+5)} = \frac{1}{\lim\limits_{x\to 1}(x+3) \cdot \lim\limits_{x\to 1}(3x+5)} = \frac{1}{32}.$$

Zu b) Hier handelt es sich um einen Ausdruck vom Typ „$\infty - \infty$“ und wir müssen auch hier die Funktion umformen, bevor wir die Grenzwertsätze anwenden können:

$$\begin{aligned}\sqrt{x^2+3x+2} - x &= \left(\sqrt{x^2+3x+2} - x\right) \cdot \frac{\sqrt{x^2+3x+2} + x}{\sqrt{x^2+3x+2} + x} \\ &= \frac{x^2+3x+2-x^2}{\sqrt{x^2+3x+2} + x} \\ &= \frac{3x+2}{\sqrt{x^2+3x+2} + x} \\ &= \frac{3+\frac{2}{x}}{\sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1}.\end{aligned}$$

Da die Grenzwerte der einzelnen Summanden alle existieren, folgt mit den Grenzwertsätzen

$$\lim_{x\to +\infty} \sqrt{x^2+3x+2} - x = \frac{\lim\limits_{x\to +\infty} 3 + \frac{2}{x}}{\lim\limits_{x\to +\infty} \sqrt{1+\frac{3}{x}+\frac{2}{x^2}} + 1} = \frac{3+0}{\sqrt{1+0+0}+1} = \frac{3}{2}.$$

Zu c) Nach den Rechenregeln für die Exponentialfunktion und den Logarithmus gilt:

$$\begin{aligned}x^{(x^x)} &= e^{\ln(x^{(x^x)})} = e^{x^x \cdot \ln(x)} = e^{\ln(x) \cdot e^{\ln(x^x)}} = e^{\ln(x) \cdot e^{x \cdot \ln(x)}}. \\ (x^x)^x &= x^{x \cdot x} = e^{\ln(x^{x \cdot x})} = e^{x^2 \cdot \ln(x)}.\end{aligned}$$

Daraus folgt

$$\frac{x^{(x^x)}}{(x^x)^x} = \frac{e^{\ln(x)\cdot e^{x\cdot\ln(x)}}}{e^{x^2\cdot\ln(x)}} = e^{\ln(x)\cdot(e^{x\cdot\ln(x)}-x^2)}.$$

Da Exponentialfunktion und Logarithmusfunktion stetig sind, folgt aus den Grenzwertsätzen:

$$\begin{aligned}\lim_{x\to e}\frac{x^{(x^x)}}{(x^x)^x} &= \lim_{x\to e} e^{\ln(x)\cdot(e^{x\cdot\ln(x)}-x^2)} = e^{\lim\limits_{x\to e}\left(\ln(x)\cdot(e^{x\cdot\ln(x)}-x^2)\right)} = e^{\ln(e)\cdot(e^{e\cdot\ln(e)}-e^2)}\\ &= e^{(e^e-e^2)}.\end{aligned}$$