Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 12

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 34

a) Es sei $P(x) := a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$ ein reelles Polynom vom Grad $n \geq 1$. Zeigen Sie:

   i) Ist n ungerade, so besitzt P mindstens eine reelle Nullstelle.

   ii) Ist n gerade und $a_0 \cdot a_n < 0$, so besitzt P mindestens zwei verschiedene reelle Nullstellen.

b) Zeigen Sie, dass es mindestens zwei verschiedene Lösungen der Gleichung

$$x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} = 0 \qquad (*)$$

gibt, die im offenen Intervall $(0, 2)$ liegen.

Lösung:

Zu a) Ohne Beschränkung der Allgemeinheit sei $a_n > 0$. (Sonst betrachten wir das Polynom $-P(x)$). Die durch das Polynom definierte Funktion $P : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist stetig, wir können also den Zwischenwertsatz anwenden. Es gilt:

$$P(x) = x^n \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \right).$$

Da $\lim\limits_{x\to\pm\infty} \frac{c}{x^j} = 0$ für alle $j > 0$ und $c \in \mathbb{R}$, erhalten wir

$$\lim_{x\to\pm\infty} \left(a_n + \frac{a_{n-1}}{x} + \frac{a_{n-2}}{x^2} + \ldots + \frac{a_0}{x^n} \right) \;=\; a_n > 0.$$

Das Konvergenzverhalten von $P(x)$ für $x \to \pm\infty$ wird also durch dasjenige von x^n bestimmt.

1. Fall: Sei n ungerade.
Dann gilt $\lim\limits_{x\to+\infty} x^n = +\infty$ und $\lim\limits_{x\to-\infty} = -\infty$. Folglich ist

$$\lim_{x\to+\infty} P(x) = +\infty \quad \text{und} \quad \lim_{x\to-\infty} P(x) = -\infty.$$

Es existiert also eine negative Zahl $x_1 \in \mathbb{R}$ mit $P(x_1) < 0$ und eine positive Zahl $x_2 \in \mathbb{R}$ mit $P(x_2) > 0$. Nach dem Zwischenwertsatz existiert dann ein $\xi \in (x_1, x_2)$ mit $P(\xi) = 0$.

2. Fall: Sei n gerade und $a_n \cdot a_0 < 0$, d.h $a_0 < 0$ da $a_n > 0$.
Dann gilt $\lim\limits_{x\to-\infty} P(x) = +\infty$. Es gibt also ein $x_1 < 0$, so dass $P(x_1) > 0$. Da $P(0) = a_0 < 0$, existiert nach dem Zwischenwertsatz ein $\xi_1 \in (x_1, 0)$ so dass $P(\xi_1) = 0$. Es gilt auch $\lim\limits_{x\to+\infty} P(x) = +\infty$. Es gibt also ein $x_2 > 0$, so dass $P(x_2) > 0$. Mit dem Zwischenwertsatz erhalten wir dann ein $\xi_2 \in (0, x_2)$, so das $P(\xi_2) = 0$. Damit haben wir zwei verschiedene reelle Nullstellen von $P(x)$ gefunden.

Zu b) Wir betrachten die Funktion $g : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}$, definiert durch

$$g(x) := x^3 - x - \sqrt{x} + \frac{1}{2} \qquad \text{für alle } x \in \mathbb{R}^+.$$

g ist als Summe stetiger Funktionen stetig. Die Lösungen der Gleichung $(*)$ sind gerade die Nullstellen von g. Wir betrachten die Funktionswerte an den Stellen 0, 1 und 2.

$$\begin{array}{rclclcl} g(0) &=& 0^3 - 0 - \sqrt{0} + \frac{1}{2} &=& \frac{1}{2} &>& 0, \\ g(1) &=& 1^3 - 1 - \sqrt{1} + \frac{1}{2} &=& -\frac{1}{2} &<& 0, \\ g(2) &=& 2^3 - 2 - \sqrt{2} + \frac{1}{2} &=& \frac{13}{2} - \sqrt{2} &>& 0, \end{array}$$

Laut Zwischenwertsatz existieren folglich im Intervall $(0, 1)$ und im Intervall $(1, 2)$ je mindestens eine Nullstelle von g. D.h. es gibt im Intervall $(0, 2)$ mindestens zwei verschiedene Lösungen der Gleichung $(*)$.

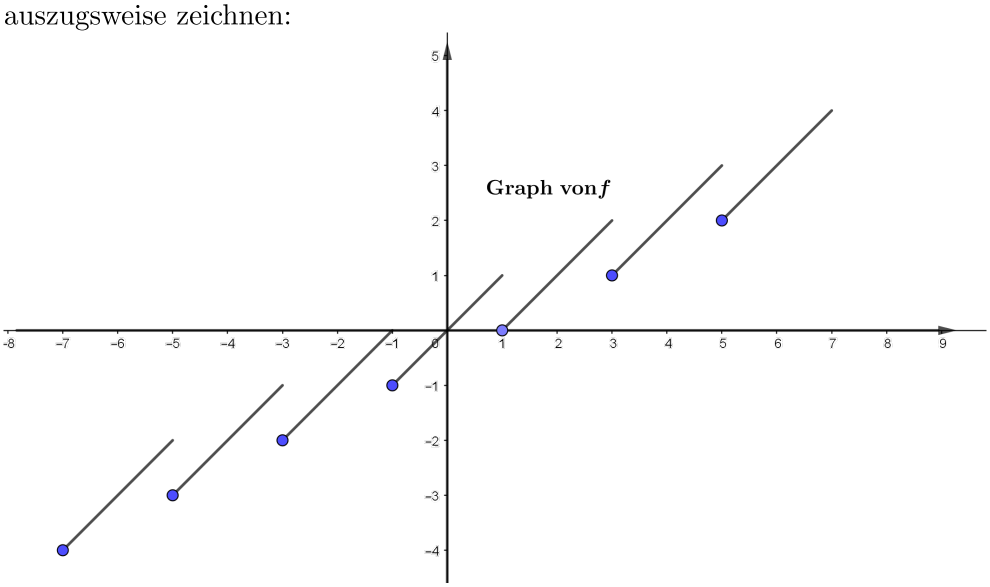
Aufgabe 35

a) Geben Sie eine Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ an, so dass *jedes* $y \in \mathbb{R}$ *genau zwei* Urbilder besitzt.

b) Zeigen Sie, dass es keine *stetige* Funktion gibt, so dass jedes $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Urbilder besitzt.

Lösung:

Zu a) Als Beispiel soll uns die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ dienen, deren Graph wir zunächst auszugsweise zeichnen:



Wir betrachten die halboffenen Intervalle $I_k := [2k - 1, 2k + 1)$ für $k \in \mathbb{Z}$. Offensichtlich ist der Definitionsbereich $\mathbb{R}$ von f die *disjunkte* Vereinigung aller dieser Intervalle:

$$\mathbb{R} = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}} I_k = \dot{\bigcup_{k \in \mathbb{Z}}} [2k - 1, 2k + 1).$$

Wir definieren $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ durch:

$$f(x) := x - k \qquad \text{falls } x \in [2k-1, 2k+1).$$

Dann gilt $f([2k-1, 2k+1)) = [k-1, k+1) =: J_k$. Die Vereinigung aller Intervalle J_k liefert den Wertebereich $\mathbb{R}$, im Gegensatz zu den den Intervallen I_k sind die Intervalle J_k aber nicht mehr paarweise disjunkt. Die eingeschränkte Funktion $f_k := f|_{I_k} : I_k \to J_k$ ist bijektiv.
Wir zeigen, dass die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ für jedes $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Urbilder besitzt:
Sei $y \in \mathbb{R}$. Dann existiert genau ein $m \in \mathbb{Z}$ mit $m \leq y < m+1$. Folglich gilt $y \in J_k$ genau dann wenn $k = m$ oder $k = m+1$. y tritt also im Bild der Funktionenabschnitte f_m und f_{m+1} auf und in keinem weiteren Abschnitt. Auf jedem der beiden Funktionenabschnitte hat y genau ein Urbild, d.h. y hat bei f insgesamt genau zwei Urbilder.

Zu b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ *stetig* und besitze jedes $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Urbilder. Dann hat f insbesondere genau zwei Nullstellen x_1 und x_2, die wir so nummerieren, dass $x_1 < x_2$.
f hat auf den Intervallen $(-\infty, x_1)$, (x_1, x_2) und $(x_2, +\infty)$ jeweils das gleiche Vorzeichen (sonst gäbe es nach dem Zwischenwertsatz eine weitere Nullstelle). Sei ohne Beschränkung der Allgemeinheit $f|_{(x_1,x_2)} > 0$ (sonst betrachten wir $-f$). Da f stetig ist, nimmt f auf dem kompakten Intervall $[x_1, x_2]$ ein Maximum $M > 0$ an und zwar in einem Punkt $\xi \in (x_1, x_2)$. Nach dem Zwischenwertsatz hat die Zahl $\frac{M}{2}$ sowohl auf (x_1, ξ) als auch auf (ξ, x_2) ein Urbild. Da f surjektiv ist, muß die Zahl $2M$ im Bild von f auf dem Intervall $(-\infty, x_1)$ oder auf dem Intervall $(x_2, +\infty)$ auftreten, sei z.B. $f(a) = 2M$ mit $a \in (x_2, +\infty)$ (der andere Fall geht geht analog). Dann muß aber nach dem Zwischenwertsatz die Zahl $\frac{M}{2}$ im Bild von f auf (x_2, a) liegen. Das wäre ein drittes Urbild von $\frac{M}{2}$. Dies wiederspricht aber der Voraussetzung an f. Es kann also keine *stetige* Funktion f geben, für die jedes $y \in \mathbb{R}$ genau zwei Urbilder hat.

Aufgabe 36: Sei $f : [a,b] \to [a,b]$ eine lipschitzstetige Funktion mit Lipschitz-Konstante $L < 1$, d.h. es gilt

$$|f(x) - f(y)| \leq L \cdot |x - y| \quad \forall\, x, y \in [a,b].$$

a) Zeigen Sie, dass f *genau einen* Fixpunkt ξ besitzt.

b) Zeigen Sie des Weiteren, dass man den Fixpunkt ξ wie folgt bestimmen kann:
Man fixiert $x_0 \in [a,b]$ und betrachtet die rekursiv definierte Folge (x_n) mit $x_{n+1} := f(x_n)$, $n \in \mathbb{N}_0$. Dann gilt (unabhängig vom Startpunkt x_0 !):

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n.$$

(*Tipp: Vergleichen Sie mit Aufgabe 24 a)*)

Lösung: Jede lipschitzstetige Funktion ist stetig. Wir wissen bereits aus der Vorlesung, dass eine *stetige* Funktion $f : [a,b] \to [a,b]$ *mindestens einen* Fixpunkt besitzt. Wir müssen also nur noch zeigen, dass der Fixpunkt unter der stärkeren Voraussetzung an f eindeutig bestimmt ist und sich mit der in der Aufgabe angegebenen Formel berechnen läßt.

Eindeutigkeit des Grenzwertes: Seien $\xi_1, \xi_2 \in [a,b]$ zwei Fixpunkte von f. Dann folgt aus der Lipschitzstetigkeit von f:

$$|\xi_1 - \xi_2| \stackrel{Fixp.}{=} |f(\xi_1) - f(\xi_2)| \leq L \cdot |\xi_1 - \xi_2| \stackrel{L<1}{<} |\xi_1 - \xi_2|.$$

Diese Ungleichung kann aber nur gelten, wenn $\xi_1 = \xi_2$. Folglich kann f nicht zwei verschiedene Fixpunkte haben.

Formel für den Fixpunkt: Sei $x_0 \in [a,b]$ beliebig und (x_n) die folgende rekursiv definerte Folge in $[a,b]$:

$$x_{n+1} := f(x_n) \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N}_0.$$

Dann gilt wegen der Lipschitzstetigkeit von f:

$$|x_{n+1} - x_n| = |f(x_n) - f(x_{n-1})| \leq L \cdot |x_n - x_{n-1}| \qquad \text{für alle } n \in \mathbb{N},$$

wobei $0 < L < 1$. Nach Aufgabe 24a) wissen wir dann, dass die Folge (x_n) eine Cauchy-Folge ist und somit konvergiert. Sei $\xi := \lim_{n\to\infty} x_n$. Da $a \leq x_n \leq b$ für alle $n \in \mathbb{N}_0$, gilt auch für den Grenzwert $a \leq \xi \leq b$. Der Grenzwert ξ ist ein Fixpunkt von f, denn es gilt:

$$\xi = \lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x_{n+1} \stackrel{Def.(x_n)}{=} \lim_{n\to\infty} f(x_n) \stackrel{f\ stetig}{=} f(\xi).$$