Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 13

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)

Wintersemester 2017/18

Aufgabe 37
Zeigen Sie mit Hilfe von Sätzen aus der Vorlesung (bis einschließlich Kapitel 4) die folgenden Grenzwertformeln:

a) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{e^x-1}{x} = 1.$

b) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$

c) $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$

Tipp: Benutzen Sie für b) und c) das Einschließungslemma für $\sin(x)$ *und* $\cos(x)$ *und zeigen Sie für a), dass* $1+x \leq e^x \leq \frac{1}{1-x}$ *für alle* $x<1$.

Lösung:

Zu a) Wir zeigen zuerst das folgende Einschließungslemma für e^x:

$$1+x \leq e^x < \frac{1}{1-x} \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } x<1.$$

Behauptung: $1+x \leq e^x$ für alle $x \in \mathbb{R}$: $\qquad (*)$

- Wenn $x \geq 0$, dann gilt
$$1+x \leq 1+x+\frac{x^2}{2!}+\frac{x^3}{3!}+\frac{x^4}{4!}+\ldots = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{x^k}{k!} = e^x.$$
- Wenn $-\infty < x \leq -1$, dann gilt $\;1+x \leq 0 < e^x$.
- Wenn $-1 < x < 0$, dann ist $e^x = \sum\limits_{k=0}^{\infty} (-1)^k \frac{|x|^k}{k!}$ eine alternierende Reihe und die Folge $(\frac{|x|^k}{k!})$ ist eine monoton fallende Nullfolge reeller Zahlen. Dann ist die Folge (s_{2m+1}) der ungeraden Partialsummen $s_{2m+1} := \sum\limits_{k=0}^{2m+1} (-1)^k \frac{|x|^k}{k!}$ streng monoton wachsend und konvergiert gegen e^x (siehe Beweis des Leibniz-Kriteriums für alternierende Reihen). Es gilt also insbesondere:
$$s_1 = 1 - \frac{|x|}{1} = 1+x < e^x.$$

Damit haben wir die Behauptung $(*)$ bewiesen.

Behauptung: $e^x \leq \frac{1}{1-x}$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $x<1$: $\qquad (**)$
Wir setzen in $(*)$ für die Variable die reelle Zahl $-x$ ein. Es gilt also:

$$1-x \leq e^{-x}.$$

Da $x<1$, sind $(1-x)$ und e^{-x} positiv. Wir erhalten also durch Umstellen die Ungleichung $(**)$.

Aus $(*)$ und $(**)$ folgt

$$x \leq e^x - 1 < \frac{1}{1-x} - 1 = \frac{x}{1-x} \qquad \forall\, x < 1$$

und daraus

$$\begin{aligned} 1 < \ & \tfrac{e^x-1}{x} & < \frac{1}{1-x} \quad & \forall\, 0 < x < 1, \\ 1 > \ & \tfrac{e^x-1}{x} & > \frac{1}{1-x} \quad & \forall\, x < 0. \end{aligned}$$

Dann folgt nach dem Sandwichlemma für den rechtsseitigen und den linksseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{e^x - 1}{x} = 1 \qquad \text{und} \qquad \lim_{x\to 0^+} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Somit existiert der Grenzwert von $\frac{e^x-1}{x}$ für $x \to 1$ und es gilt:

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - 1}{x} = 1.$$

Zu b) Wir benutzen das Einschließungslemma für $\sin(x)$ aus der Vorlesung. Es gilt:

$$x - \frac{x^3}{6} < \sin(x) < x \qquad \forall\, x \in (0,2).$$

Also

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad \forall\, x \in (0,2). \qquad\qquad (***)$$

Da $\frac{\sin(-x)}{-x} = \frac{\sin(x)}{x}$ stehen in der Ungleichung $(***)$ nur gerade Funktionen, d.h. es gilt:

$$1 - \frac{x^2}{6} < \frac{\sin(x)}{x} < 1 \qquad \forall\, x \in (-2,2) \setminus \{0\}.$$

Mit dem Sandwichlemma folgt daraus

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

Zu c) Wir benutzen das Einschließungslemma für $\cos(x)$ aus der Vorlesung:

$$1 - \frac{x^2}{2} < \cos(x) < 1 - \frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \qquad \forall\, x \in (0,2).$$

Da in dieser Ungleichung nur gerade Funktionen stehen, gilt sie für alle $x \in (-2,2)$. Es folgt

$$-\frac{x^2}{2} < \cos(x) - 1 < -\frac{x^2}{2} + \frac{x^4}{12} \qquad \forall\, x \in (-2,2)$$

und somit

$$\begin{aligned} -\frac{x}{2} < \ & \tfrac{\cos(x)-1}{x} & < -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \quad & \forall\, x \in (0,2), \\ -\frac{x}{2} > \ & \tfrac{\cos(x)-1}{x} & > -\frac{x}{2} + \frac{x^3}{12} \quad & \forall\, x \in (-2,0). \end{aligned}$$

Mit dem Sandwichlemma erhalten wir für den linksseitigen und den rechtsseitigen Grenzwert:

$$\lim_{x\to 0^-} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0 \quad \text{und} \quad \lim_{x\to 0^+} \frac{\cos(x) - 1}{x} = 0.$$

Somit existiert der Grenzwert von $\frac{\cos(x)-1}{x}$ für $x \to 0$ und es gilt

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)-1}{x} = 0.$$

Aufgabe 38

a) Seien $A, B \in \mathbb{R}$ und $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$h(x) := \begin{cases} \frac{x^4-10x^2+9}{x^2-3x+2} & \text{falls } x \neq 1 \text{ und } x \neq 2, \\ A & \text{falls } x = 1, \\ B & \text{falls } x = 2. \end{cases}$$

Kann man A und B so wählen, dass h in $x_1 = 1$ bzw. $x_2 = 2$ differenzierbar ist? Bestimmen Sie ggf. die Ableitung in diesen Punkten.

b) Sei $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ die Funktion

$$f(x) := \begin{cases} 0 & \text{falls } x = 0, \\ x^3 \cdot \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{falls } x \neq 0. \end{cases}$$

Untersuchen Sie, ob f stetig, differenzierbar, stetig differenzierbar bzw. 2-mal differenzierbar ist.

Lösung:

Zu a)

Sei $P(x) := x^4 - 10x^2 + 9$ und $Q(x) = x^2 - 3x + 2$. $Q(x)$ hat die Nullstellen $x_1 = 1$ und $x_2 = 2$, wir erhalten also die Linearfaktorzerlegung $Q(x) = (x-1)(x-2)$.

Wir untersuchen die Differenzierbarkeit von f im Punkt $x_1 = 1$:
Damit f in $x_1 = 1$ differenzierbar ist, muß f in $x_1 = 1$ auch stetig sein.
$x_1 = 1$ ist auch Nullstelle von $P(x)$ und Polynomdivision ergibt:

$$P(x) = (x-1)(x^3 + x^2 - 9x - 9).$$

Das Polynom $\hat{P}(x) := x^3+x^2-9x-9$ ist in $x_1 = 1$ von Null verschieden, es gilt $\hat{P}(1) = -16$.
Folglich gilt für $x \neq 1, x \neq 2$

$$f(x) = \frac{P(x)}{(x-1)(x-2)} = \frac{x^3+x^2-9x-9}{x-2}$$

und somit

$$\lim_{x\to 1} f(x) = \frac{-16}{-1} = 16.$$

Damit f in $x_1 = 1$ stetig wird, müssen wir $A = 16$ setzen. Sei also ab jetzt $A = 16$. Dann ist f auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ die rationale Funktion

$$f(x) = \frac{x^3+x^2-9x-9}{x-2}$$

und somit auf dieser Menge und insbesondere in $x_1 = 1$ differenzierbar. Für die Ableitung von f auf $\mathbb{R} \setminus \{2\}$ gilt nach der Quotientenregel:

$$f'(x) = \frac{(3x^2+2x-9)(x-2) - (x^3+x^2-9x-9)}{(x-2)^2}$$

und wir erhalten in $x_1 = 1$: $f'(1) = 20$.
Wir untersuchen nun die Differenzierbarkeit von f im Punkt $x_2 = 2$.
Damit f in $x_2 = 2$ differenzierbar ist, muß f in $x_2 = 2$ auch stetig sein. Wir sehen aber, dass $x_2 = 2$ keine Nullstelle des Polynoms $\hat{P}(x) = x^3 + x^2 - 9x - 9$ ist, es gilt $\hat{P}(2) = -15$. Der rechtsseitige Grenzwert von $\frac{1}{x-2}$ in $x_2 = 2$ ist $+\infty$ (uneigentlicher Grenzwert). Folglich gilt für den rechtsseitigen Grenzwert von $f(x)$ in $x_2 = 2$

$$\lim_{x \to 2^+} f(x) = \lim_{x \to 2^+} \frac{1}{x-2} \cdot (x^3 + x^2 - 9x - 9) = -\infty.$$

D.h. der rechtsseitige Genzwert von f in $x_2 = 2$ existiert nicht in $\mathbb{R}$. Es gibt also kein $B \in \mathbb{R}$, so dass f in $x_2 = 2$ stetig wird. Damit ist f in $x_2 = 2$ auch für kein $B \in \mathbb{R}$ differenzierbar.

Zu b) Wir bemerken zunächst, dass die Funktion

$$x \in \mathbb{R} \setminus \{0\} \longmapsto \sin(\tfrac{1}{x}) \in \mathbb{R}$$

als Verkettung differenzierbarer Funktionen differenzierbar ist. Somit ist auch f als Produkt differenzierbarer Funktionen in jedem Punkt $x \in \mathbb{R} \setminus \{0\}$ differenzierbar. Die Ableitung von f in $x \neq 0$ berechnet sich nach Produkt- und Kettenregel als

$$f'(x) = 3x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) + x^3 \cos(\tfrac{1}{x}) \cdot \tfrac{-1}{x^2} = 3x^2 \cdot \sin(\tfrac{1}{x}) - x \cdot \cos(\tfrac{1}{x}).$$

Wir betrachten nun den Differenzenquotienten vo f in $x_0 = 0$, um die Differenzierbarkeit von f in $x_0 = 0$ zu untersuchen. Es ist

$$\tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \tfrac{x^3 \sin(\frac{1}{x})}{x} = x^2 \sin(\tfrac{1}{x}).$$

Da $|\sin \frac{1}{x}|$ beschränkt ist und $\lim\limits_{x \to 0} x^2 = 0$, folgt

$$\lim_{x \to 0} \tfrac{f(x)-f(0)}{x-0} = \lim_{x \to 0} x^2 \sin(\tfrac{1}{x}) = 0.$$

Also ist f auch in $x_0 = 0$ differenzierbar.
Da f auf $\mathbb{R}$ differenzierbar ist, ist f auf $\mathbb{R}$ auch stetig.
Wir untersuchen als Nächstes, ob f stetig differenzierbar ist, d.h. ob die Ableitungsfunktion f' auf $\mathbb{R}$ stetig ist. Die Ableitungsfunktion $f' : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist gegeben durch

$$f'(x) = \begin{cases} 3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x}) & \text{falls } x \neq 0, \\ 0 & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

f' ist also in allen Punkten $x \neq 0$ als Verknüpfung, Summe und Produkt stetiger Funktionen stetig. Wir prüfen nun noch die Stetigkeit in $x_0 = 0$. Da die Sinus- und Cosinusfunktion beschränkt sind, folgt wie oben

$$\lim_{x \to 0} f'(x) = 0.$$

Der Grenzwert existiert also und stimmt mit $f'(0) = 0$ überein, d.h. f' ist in $x_0 = 0$ ebenfalls stetig. f' ist also auf ganz $\mathbb{R}$ stetig und damit ist f stetig differenzierbar.
Wir untersuchen abschließend, ob f zweimal differenzierbar ist. Ist $x \neq 0$, so ist f' in x differenzierbar, da f' Verknüpfung, Summe und Produkt differenzierbarer Funktionen ist, d.h. $f''(x)$ existiert für alle $x \neq 0$. Für den Differenzenquotienten von f' in $x_0 = 0$ gilt

$$\tfrac{f'(x)-f'(x_0)}{x-x_0} = \tfrac{3x^2 \sin(\frac{1}{x}) - x \cos(\frac{1}{x})}{x} = 3x \sin(\tfrac{1}{x}) - \cos(\tfrac{1}{x}).$$

Der 1. Summand konvergiert für $x \to 0$ gegen 0 (Argumente wie oben), der 2. Summand besitzt aber keinen Grenzwert für $x \to 0$ (siehe Vorlesung), d.h. f' ist in $x_0 = 0$ nicht differenzierbar, d.h. f ist auf $\mathbb{R}$ nicht zweimal differenzierbar.

Aufgabe 39:

a) Sei $\alpha > 1$ eine fixierte reelle Zahl und $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine reelle Funktion mit

$$|f(x)| \leq |x|^\alpha \quad \forall\, x \in (-1, 1).$$

Zeigen Sie, dass f in $x_0 = 0$ differenzierbar ist und dass $f'(0) = 0$ gilt.

b) Sei $f : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit $f(0) = 0$. Wir definieren die Funktion $g : (-1, 1) \to \mathbb{R}$ durch

$$g(x) := \begin{cases} \frac{f(x)}{x} & \text{falls } x \neq 0, \\ f'(0) & \text{falls } x = 0. \end{cases}$$

Zeigen Sie, dass g stetig ist.

Lösung:

Zu a) Wir bemerken zunächst, dass die Voraussetzung insbesondere $|f(0)| \leq |0|^\alpha = 0$ impliziert, d.h. $f(0) = 0$. Wir betrachten nun den Differenzenquotienten. Für $x \in (-1, 1)$ ist

$$0 \leq \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = \frac{|f(x)|}{|x|} \leq \frac{|x|^\alpha}{|x|} = |x|^{\alpha - 1}.$$

Da $\alpha > 1$ ist, folgt $\alpha - 1 > 0$ und damit $\lim\limits_{x \to 0} |x|^{\alpha-1} = 0$. Dann ist aber (nach dem Sandwich-Lemma)

$$\lim_{x \to 0} \left| \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \right| = 0 \quad \text{und damit auch} \quad \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} = 0.$$

Also ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar mit Ableitung $f'(0) = 0$. $\square$.

Zu b) Da f differenzierbar ist, ist f stetig, d.h. g ist auf $(-1, 1) \setminus \{0\}$ als Quotient stetiger Funktionen stetig. Wir zeigen nun noch die Stetigkeit von g in $x_0 = 0$. Es gilt:

$$\lim_{x \to 0} g(x) = \lim_{x \to 0} \frac{f(x)}{x} \overset{f(0)=0}{=} \lim_{x \to 0} \frac{f(x) - f(0)}{x - 0} \overset{f \text{ diffb}}{=} f'(0) \overset{\text{Def.}}{=} g(0).$$

Damit ist g nach dem Grenzwertkriterium in $x_0 = 0$ stetig. $\square$.