Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 14

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 40

Sei $f : I \to \mathbb{R}$ eine in $x_0 \in I$ differenzierbare Funktion, $P_0 = (x_0, f(x_0))$ und $Tan(f, P_0)$ die Tangente an den Graphen der Funktion f im Punkt P_0. Zeigen Sie:

1. Wenn $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. dann schneidet die Tangente $Tan(f, P_0)$ die x-Achse immer im Punkt $(x_0 - 1, 0)$.
2. Wenn $f : (0, +\infty) \to \mathbb{R}$ gegeben ist durch $f(x) = \frac{1}{x}$, dann hat das von der Tangente $Tan(f, P_0)$ und den Koordinatenachsen gebildete Dreieck immer den Flächeninhalt 2.

Lösung: Die Funktionsgleichung für die Tangente $Tan(f, P_0)$ lautet

$$T_1(f, x_0)(x) = f'(x_0)(x - x_0) + f(x_0).$$

Zu a) Es sei $f = \exp : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$. Dann gilt $f'(x_0) = e^{x_0}$ und $f(x_0) = e^{x_0}$. Die Funktionsgleichung für die Tangente lautet in diesem Fall also:

$$T_1(\exp, x_0)(x) = e^{x_0}(x - x_0) + e^{x_0} = e^{x_0}(x - x_0 + 1).$$

Die Tangente $Tan(\exp, P_0)$ schneidet die x-Achse im Punkt $(x, 0)$, wobei x die Nullstelle der Funktion $T_1(\exp, x_0)$ ist. Da $e^{x_0} > 0$ für alle $x_0 \in \mathbb{R}$, gilt $T_1(\exp, x_0)(x) = 0$ genau dann, wenn $x = x_0 - 1$. D.h. die Tangente $Tan(\exp, P_0)$ schneidet die x-Achse im Punkt $(x_0 - 1, 0)$.

Zu b) Es sei $f : (0, \infty) \to \mathbb{R}$ gegeben durch $f(x) = \frac{1}{x}$. Es gilt $f'(x_0) = -\frac{1}{x_0^2}$. Die Funktionsgleichung für die Tangente $Tan(f, P_0)$ lautet in diesem Fall also:

$$T_1(f, x_0)(x) = -\frac{1}{x_0^2}(x - x_0) + \frac{1}{x_0}.$$

Der Schnittpunkt der Tangente $Tan(f, P_0)$ mit der y-Achse ist der Punkt $(0, T_1(f, x_0)(0)) = (0, \frac{2}{x_0})$. Der Schnittpunkt der Tangente $Tan(f, P_0)$ mit der x-Achse ist der Punkt $(x, 0)$, wobei x die Nullstelle der Funktion $T_1(f, x_0)$ ist. Es gilt $T_1(f, x_0)(x) = 0$ genau dann, wenn $x = 2x_0$, d.h. der Schnittpunkt der Tangente $Tan(f, P_0)$ mit der x-Achse ist der Punkt $(2x_0, 0)$. Das Dreieck, das von der Tangente und den Koordinatenachsen gebildet wird, ist rechtwinklig und hat Katheten der Länge $2x_0$ und $\frac{2}{x_0}$. Der Flächeninhalt dieses Dreiecks ist folglich $\frac{1}{2} \cdot 2x_0 \cdot \frac{2}{x_0} = 2$.

Aufgabe 41

a) Es seien M und r zwei reelle Zahlen mit $M > 0$ und $r > 1$ und $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ eine Funktion mit
$$|f(x) - f(y)| \le M|x - y|^r \quad \text{für alle } x, y \in (a, b).$$
Zeigen Sie, dass f konstant ist.

b) Sei $h : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion mit
$$0 \le h'(x) \le h(x) \quad \text{für alle } x \in \mathbb{R}.$$
Zeigen Sie: Besitzt h *eine* Nullstelle, so gilt $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$.
(*Tipp:* Betrachten Sie auch die Funktion $g(x) := e^{-x}h(x)$.)

Lösung:

Zu a) Wir wissen, dass eine auf einem Intervall (a, b) definierte Funktion konstant ist, wenn sie differenzierbar ist und ihre Ableitung identisch Null ist. Wir weisen dies jetzt für die Funktion f nach.
Es seien $x, y \in (a, b)$ mit $x \ne y$. Dann gilt laut Voraussetzung:
$$\left|\frac{f(x) - f(y)}{x - y}\right| \le M|x - y|^{r-1}.$$
Insbesondere gilt für alle $x_0 \in (a, b)$ und alle Folgen (x_n) aus (a, b), die gegen x_0 konvergieren:
$$-M|x_n - x_0|^{r-1} \quad \le \quad \tfrac{f(x_n)-f(x_0)}{x_n-x_0} \quad \le \quad M|x_n - x_0|^{r-1} \qquad (*)$$
Da $r > 1$, konvergieren die rechte und die linke Seite der Ungleichung $(*)$ für $n \to \infty$ gegen Null. Mit dem Sandwichlemma folgt
$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n) - f(x_0)}{x_n - x_0} = 0.$$
D.h. f ist auf dem offenen Intervall (a, b) differenzierbar und die Ableitung ist überall 0. Somit ist f auf (a, b) konstant.

Zu b) Angenommen $h(x_0) = 0$ für ein $x_0 \in \mathbb{R}$. Laut Voraussetzung ist $h \ge h' \ge 0$. D.h. h ist monoton wachsend. Insbesondere folgt für alle $x < x_0$, dass $h(x) \le h(x_0) = 0$ gelten muss. Da h aber nicht negativ ist, muss $h|_{(-\infty,x_0]} \equiv 0$ gelten. Um zu zeigen, dass $h(x) = 0$ auch für $x > x_0$ gilt, betrachten wir die Funktion $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(x) := e^{-x} \cdot h(x)$. Dann gilt $g(x) \ge 0$ und $g(x_0) = e^{-x_0} \cdot h(x_0) = 0$. Außerdem gilt mit Produkt- und Kettenregel für die Ableitung von g:
$$g'(x) = -e^{-x} \cdot h(x) + e^{-x} \cdot h'(x) = \underbrace{e^{-x}}_{>0} \cdot (\underbrace{h'(x) - h(x)}_{\le 0}) \le 0.$$
D.h. g ist monoton fallend. Da $g(x_0) = 0$ muß folglich $g(x) \le 0$ für alle $x > x_0$ gelten. Da aber $g(x) \ge 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, folgt $g(x) = 0$ für alle $x > x_0$. Somit gilt auch $h(x) = 0$ für alle $x > x_0$.
Folglich ist $h(x) = 0$ für alle $x \in \mathbb{R}$, wenn h eine Nullstelle besitzt.

Aufgabe 42 Wieviele reelle Lösungen haben die Gleichungen

a) $x(x - \sin x) = \cos x$.

b) $2^x = 1 + x^2$.

Lösung:
Zu a) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := x(x - \sin(x)) - \cos(x).$$

Es gilt:

$$f(-2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0, \quad f(0) = -1, \quad f(2\pi) = 4\pi^2 - 1 > 0.$$

Da f stetig ist, folgt aus dem Zwischenwertsatz, dass f mindestens zwei Nullstellen hat, eine negative (zwischen -2π und 0) und eine positive (zwischen 0 und 2π). Wir zeigen jetzt mit den Mitteln der Differentialrechnung, dass es nicht mehr als zwei Nullstellen geben kann.
Da cos und sin differenzierbar sind, ist f auch differenzierbar und es gilt:

$$f'(x) = (x - \sin(x)) + x(1 - \cos(x)) + \sin(x) = x + x - x\cos(x) = x \cdot (\underbrace{2 - \cos(x)}_{>0}).$$

Folglich gilt $f'(x) < 0$ falls $x < 0$ und $f'(x) > 0$, falls $x > 0$. f ist somit auf $(-\infty, 0)$ streng monoton fallend, und auf $(0, +\infty)$ streng monoton wachsend. Folglich kann f auf $(-\infty, 0)$ und auf $(0, +\infty)$ höchstens je eine Nullstelle haben. D.h. f hat genau zwei Nullstellen, d.h. die Gleichung a) hat genau zwei Lösungen.

Zu b) Wir betrachten die Funktion $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $f(x) := 2^x - 1 - x^2$. f ist stetig und es gilt:

$$f(0) = 0, \quad f(1) = 0, \quad f(2) = -1, \quad f(5) = 6.$$

Mit dem Zwischenwertsatz folgt, dass f mindestens eine weitere Nullstelle zwischen 2 und 5 neben den Nullstellen 0 und 1 hat. Wir zeigen nun mit den Methoden der Differentialrechnung, dass es keine weiteren Nullstellen geben kann.
f ist 2-mal differenzierbar und es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= \ln(2) \cdot e^{\ln(2)\cdot x} - 2x, \\ f''(x) &= \ln(2)^2 \cdot e^{\ln(2)\cdot x} - 2. \end{aligned}$$

f'' ist stetig und (da die Exponentialfunktion streng monoton wachsend ist) streng monoton wachsend. Es gilt $f''(0) < 0$ und $f''(3) > 0$, somit besitzt f'' nach dem Zwischenwertsatz eine Nullstelle in $(0, 3)$ und wegen der strengen Monotonie hat f'' dann genau eine Nullstelle. Nach dem Satz von Rolle kann dann f' höchstens zwei Nullstellen haben und wiederum nach dem Satz von Rolle hat f deshalb höchstens drei Nullstellen. Da wir bereits drei Nullstellen gefunden haben, hat f genau drei Nullstellen, d.h. die Gleichung b) hat genau drei Lösungen.

Aufgabe 43: Bestimmen Sie die Grenzwerte

a) $\lim\limits_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}}$.

b) $\lim\limits_{x\to 0^+}(x^x)^x$.

c) $\lim\limits_{x\to 0^+} x^{(x^x)}$.

Lösung:

Zu a) Es gilt

$$(1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}} = e^{\frac{1}{x}\cdot\ln(1+\arctan(x))}.$$

Wir untersuchen zunächst den Grenzwert der Funktion $\frac{\ln(1+\arctan(x))}{x}$ für $x \to 0$. Da $\arctan(0) = 0$ hat dieser Grenzwert den "Typ $\frac{0}{0}$". Wir versuchen deshalb die Regel von L'Hospital anzuwenden und untersuchen den Grenzwert des Quotienten der Ableitungsfunktionen $\frac{\frac{d}{dx}\ln(1+\arctan(x))}{\frac{d}{dx}x}$ für $x \to 0$. Wegen $\arctan'(x) = \frac{1}{1+x^2}$ und der Kettenregel gilt

$$\lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(1+\arctan(x))}{\frac{d}{dx}x} = \lim_{x\to 0}\frac{1}{1+\arctan(x)}\cdot\frac{1}{1+x^2} = 1.$$

Folglich kann man die Regel von L'Hospital anwenden und erhält

$$\lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+\arctan(x))}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{d}{dx}\ln(1+\arctan(x))}{\frac{d}{dx}x} = 1.$$

Da die Exponentialfunktion stetig ist, folgt

$$\lim_{x\to 0}(1+\arctan(x))^{\frac{1}{x}} = \lim_{x\to 0} e^{\frac{1}{x}\ln(1+\arctan(x))} = e^{\lim\limits_{x\to 0}\frac{1}{x}\ln(1+\arctan(x))} = e^1 = e.$$

Zu b) Es gilt

$$(x^x)^x = x^{x\cdot x} = e^{x^2\ln x}.$$

Wir untersuchen zunächst den Grenzwert der Exponentenfunktion $x^2\ln(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-2}}$ für $x \to 0^+$. Dieser Grenzwert ist vom "Typ $\frac{\infty}{\infty}$". Wir versuchen deshalb wieder die Regel von L'Hospital anzuwenden: Für den Grenzwert des Quotienten der Ableitungsfunktionen $\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x^{-2}}$ für $x \to 0^+$ erhalten wir:

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x^{-2}} = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{1}{x}}{-2x^{-3}} = \lim_{x\to 0^+} -\frac{x^3}{2x} = \lim_{x\to 0^+} -2x^2 = 0.$$

Folglich kann man die Regel von L'Hospital anwenden und erhält

$$\lim_{x\to 0^+} x^2\ln(x) = \lim_{x\to 0^+}\frac{\frac{d}{dx}\ln(x)}{\frac{d}{dx}x^{-2}} = 0.$$

Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt dann

$$\lim_{x\to 0^+}(x^x)^x = \lim_{x\to 0^+} e^{x^2\ln(x)} = e^{\lim\limits_{x\to 0^+} x^2\ln(x)} = e^0 = 1.$$

Zu c) Es gilt
$$x^{(x^x)} = e^{x^x \cdot \ln x}.$$
Wir untersuchen zunächst wieder den Grenzwert der Expontentenfunktion $x^x \ln(x)$ für $x \to 0^+$. Es gilt
$$\lim_{x \to 0^+} \ln x = -\infty.$$
Für den Grenzwert von x^x für $x \to 0^+$ gehen wir wie in b) vor: Es gilt $x^x = e^{x \ln(x)}$. Wir betrachten zunächst den Grenzwert von $x \ln(x) = \frac{\ln(x)}{x^{-1}}$ für $x \to 0^+$. Er ist vom "Typ $\frac{\infty}{\infty}$". Für den Grenzwert der Quotienten der Ableitungsfunktion für $x \to 0^+$ erhalten wir
$$\lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \ln(x)}{\frac{d}{dx} x^{-1}} = \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{1}{x}}{-x^{-2}} = \lim_{x \to 0^+} -x = 0.$$
Wir können also die Regeln von L'Hospital anwenden und erhalten:
$$\lim_{x \to 0^+} x \ln x == \lim_{x \to 0^+} \frac{\ln x}{x^{-1}} \overset{L'H}{=} \lim_{x \to 0^+} \frac{\frac{d}{dx} \ln(x)}{\frac{d}{dx} x^{-1}} = 0.$$
Aus der Stetigkeit der Exponentialfunktion folgt daraus
$$\lim_{x \to 0^+} x^x = \lim_{x \to 0^+} e^{x \ln(x)} = e^{\lim\limits_{x \to 0^+} x \ln(x)} = e^0 = 1.$$
Damit erhalten wir $\lim\limits_{x \to 0^+} x^x \ln(x) = -\infty$. Es folgt
$$\lim_{x \to 0^+} x^{(x^x)} = \lim_{x \to 0^+} e^{x^x \ln x} = 0.$$