Prof. Helga Baum
Institut für Mathematik, HU Berlin

Musterlösungen zum Übungsblatt 15

Vorlesung Analysis 1 (Lehramtsstudiengänge)
Wintersemester 2017/18

Aufgabe 44

Bestimmen Sie für die folgenden Funktionen $f : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ alle lokalen Extremwerte auf I und entscheiden Sie, ob es sich jeweils um globale Extremwerte handelt oder nicht. (*Tipp:* Untersuchen Sie dazu auch das Monotonieverhalten von f).

a) $f(x) := x^2 e^{-x}$ auf $I = \mathbb{R}$.

b) $f(x) := (x-1)^5 + 2(x-1)^4$ auf dem Intervall $I = [0,4]$.

c) $f(x) := x^x$ auf dem Intervall $I = (0, +\infty)$.

d) $f(x) := \arctan(\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)$ auf dem Intervall $I = (-1, +\infty)$.

Lösung:

Zu a) Die Funktion f ist zweimal differenzierbar. Es gilt:

$$\begin{aligned} f'(x) &= 2xe^{-x} + x^2(-e^{-x}) = e^{-x}(2x - x^2) = e^{-x} \cdot x(2-x), \\ f''(x) &= e^{-x}(x^2 - 4x + 2). \end{aligned}$$

Wir bestimmen zuerst die Kandidaten für die Extremstellen, in dem wir alle Nullstellen der Ableitung f' suchen: Es gilt

$$f'(x) = 0 \iff e^{-x} \cdot x(2-x) = 0 \iff x(2-x) = 0 \iff x = 0 \text{ oder } x = 2.$$

Für die 2. Ableitungen erhalten wir:

$$f''(0) = 2 > 0 \quad \text{und} \quad f''(2) = e^{-2}(4 - 8 + 2) = -2e^{-2} < 0.$$

Folglich hat f in $x = 0$ ein lokales Minimum, nämlich $f(0) = 0$, und in $x = 2$ ein lokales Maximum, nämlich $f(2) = 4e^{-2}$ und weitere lokale Extremstellen gibt es nicht. Da $f(x) \geq 0 = f(0)$ für alle $x \in \mathbb{R}$, ist 0 auch das globale Minimum von f. Anderseits gilt $\lim_{x \to -\infty} f(x) = +\infty$ und damit kann kein globales Maximum von f existieren.

Alternative Lösung für die lokalen Extemstellen: Aus der Formel für f' erkennt man, dass $f'(x) < 0$ für alle $x \in (-\infty, 0)$, $f'(x) > 0$ für alle $x \in (0,2)$ und $f'(x) < 0$ für alle $x \in (2, +\infty)$. Folglich ist f auf $(-\infty, 0)$ und $(2, +\infty)$ streng monoton fallend und auf $(0,2)$ streng monoton wachsend. Also hat f in 0 ein lokales Minimum und in 2 ein lokales Maximum.

Zu b) Für die Funktion f gilt

$$\begin{aligned} f(x) &= (x-1)^5 + 2(x-1)^4 \\ &= (x-1)^4(x - 1 + 2) \\ &= (x-1)^4(x+1) \\ &\geq 0 = f(1) \qquad \forall\, x \in [0,4]. \end{aligned}$$

Folglich besitzt f in $x = 1$ ein globales Minimum, nämlich $f(1) = 0$.
Wir untersuchen jetzt zunächst, ob es weitere lokale Extremwerte auf dem *offenen* Intervall $(0, 4)$ gibt. f ist differenzierbar und es gilt

$$f'(x) = 5(x-1)^4 + 8(x-1)^3 = (x-1)^3(5x-5+8) = (x-1)^3(5x+3),$$

also

$$f'(x) = 0 \iff (x-1)^3(5x+3) = 0 \iff x = 1 \text{ oder } x = -\frac{3}{5}.$$

Für lokale Extremstellen von f in $(0, 4)$ kommt also nur $x = 1$ in Frage und wie wir bereits wissen, liegt in $x = 1$ sogar ein globales Minimum vor.
Wir untersuchen nun abschließend noch die Randpunkt 0 und 4 des Intervalls $[0, 4]$. Die Formel für f' zeigt, dass $f'(x) < 0$ für $x \in [0, 1)$ und $f'(x) > 0$ für $x \in (1, 4]$. Folglich ist f auf $[0, 1)$ streng monoton fallend und auf $(1, 4]$ streng monoton wachsend. Somit besitzt f in den Randpunkten $x = 0$ und $x = 4$ die lokalen Maxima $f(0) = 1$ und $f(4) = 405$. Folglich ist $f(4) = 405$ das globale Maximum von f auf $[0, 4]$.

Alternative Lösung für die lokalen Extremwerte auf $(0, 4)$*:* Hat man die Nullstellen der Ableitung gefunden, kann man auch das hinreichende Kriterium mit den höheren Ableitungen nutzen. Es ist

$$f''(x) = 3(x-1)^2(5x+3) + (x-1)^3 5 = (x-1)^2(20x+4)$$

und damit $f''(1) = 0$. Wir bestimmen also als nächstes die dritte Ableitung:

$$f'''(x) = 2(x-1)(20x+4) + (x-1)^2 20 = (x-1)(60x-12)$$

und damit $f'''(1) = 0$. Wir berechnen nun die vierte Ableitung

$$f^{(4)}(x) = 60x - 12 + 60(x-1) = 120x - 72$$

und damit $f^{(4)}(1) > 0$, d.h. f hat in $x = 1$ ein lokales Minimum.

Zu c) Es gilt $f(x) = x^x = e^{x \ln x}$. f ist zweimal differenzierbar und man erhält für die Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \Big(\ln x + x\frac{1}{x}\Big)e^{x\ln x} = (\ln x + 1)x^x \\ f''(x) &= \frac{1}{x}x^x + (\ln x + 1)(\ln x + 1)x^x = x^{x-1} + (\ln x + 1)^2 x^x. \end{aligned}$$

Wir erhalten also

$$f'(x) = 0 \iff (\ln x + 1)x^x = 0 \iff \ln x + 1 = 0 \iff x = e^{-1}.$$

Weiterhin gilt $f''(e^{-1}) = (e^{-1})^{e^{-1}-1} = e^{1-e^{-1}} > 0$. Die Funktion f hat also an der Stelle $x = e^{-1}$ ein lokales Minimum, nämlich $f(e^{-1}) = e^{-e^{-1}}$. An der Formel für die 1. Ableitung sehen wir, dass $f'(x) < 0$ wenn $\ln x < -1$, d.h. wenn $x < e^{-1}$, und $f'(x) > 0$, wenn $\ln x > -1$, d.h. wenn $x > e^{-1}$. Also ist f auf $(0, e^{-1})$ streng monton fallend und auf $(e^{-1}, +\infty)$ streng monoton wachsend. Damit ist das lokale Minimum global.

Zu d) Wir betrachten zunächst wieder die Ableitung:

$$f'(x) = \frac{1}{1 + (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)^2} \cdot \Big(\frac{3}{2}x^2 - \frac{3}{2}\Big) = \frac{3}{2} \cdot \frac{x^2 - 1}{1 + (\frac{1}{2}x^3 - \frac{3}{2}x)^2}.$$

Also gilt

$$f'(x) = 0 \iff x^2 - 1 = 0 \iff x = \pm 1.$$

Als lokale Extremstelle von f auf I kommt also nur $x = 1$ in Betracht. Die Formel für f' zeigt, dass $f'(x) < 0$ falls $x \in (-1, 1)$ und $f'(x) > 0$ falls $x > 1$. Folglich ist f auf $(-1, 1)$ streng monoton fallend und auf $(x, +\infty)$ streng monotion wachsend. Folglich liegt in $x = 1$ ein globales Minimum von f vor, nämlich $f(1) = \arctan(-1) = -\frac{\pi}{4}$. Da es keine weitere lokalen Extremstellen von f außer 1 gibt, kann f kein lokales (und globales) Maximum besitzen.

Aufgabe 45 Zeigen Sie, dass für $|x| < \frac{1}{2}$ die Näherungsformel

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

mit einem Fehler gilt, der nicht größer als $\frac{1}{2}|x|^3$ ist.

Lösung: Die Funktion f mit $f(x) = \sqrt{1+x}$ ist auf $(-1, \infty)$ ∞-oft differenzierbar mit den Ableitungen

$$\begin{aligned} f'(x) &= \frac{1}{2}(1+x)^{-\frac{1}{2}}, \\ f''(x) &= -\frac{1}{4}(1+x)^{-\frac{3}{2}}, \\ f^{(3)}(x) &= \frac{3}{8}(1+x)^{-\frac{5}{2}}. \end{aligned}$$

Wir betrachten die Taylorformel für f im Entwicklungspunkt $x_0 = 0$ für $n = 2$:

$$\begin{aligned} f(x) &= T_2(f,0)(x) + R_2(f,0)(x) \\ &= \sum_{k=0}^{2} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} \cdot x^k \, + \, R_2(f,0)(x) \\ &= 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2 + R_2(f,0)(x). \end{aligned}$$

Damit haben wir den ersten Teil der Behauptung gezeigt, d.h. es gilt

$$\sqrt{1+x} \approx 1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2$$

und der Fehler bei dieser Approximation ist gegeben durch

$$R_2(f,0)(x) = \sqrt{1+x} - (1 + \frac{1}{2}x - \frac{1}{8}x^2).$$

Um diesen Fehler abzuschätzen, beschreiben wir das Restglied $R_2(f,0)(x)$ in Lagrange-Form und erhalten:

$$R_2(f,0)(x) = \frac{f^{(3)}(\xi)}{3!}x^3 \qquad \text{für ein } \xi \in \mathbb{R} \text{ mit } |\xi| < |x|.$$

Also gilt

$$|R_2(f,0)(x)| = \frac{1}{6} \cdot \left| \frac{3}{8}(1+\xi)^{-\frac{5}{2}} x^3 \right| = \frac{1}{16}|x|^3|1+\xi|^{-\frac{5}{2}}.$$

Da $|\xi| < |x| < \frac{1}{2}$, gilt $\frac{1}{2} < 1+\xi = |1+\xi|$. Daraus folgt $|1+\xi|^{-1} < 2$ und somit

$$|1+\xi|^{-\frac{5}{2}} < 2^{\frac{5}{2}} < 2^3 = 8.$$

Daraus folgt die für die Fehlerabschätzung:

$$|R_2(f,0)(x)| \leq \frac{1}{2}|x|^3 \qquad \forall\, x \in \mathbb{R} \text{ mit } |x| < \frac{1}{2}.$$

Aufgabe 46

a) Bestimmen Sie die Taylorreihe $T(f,0)(x)$ für die Funktion $f : (-1,+\infty) \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) := \frac{x}{x+1}$$

um den Entwicklungspunkt $x_0 = 0$.

b) Geben Sie den Konvergenzradius für $T(f,0)(x)$ an.

c) Zeigen Sie mit der Lagrange-Form des Restgliedes, dass $f(x) = T(f,0)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$.

d) Gilt $f(x) = T(f,0)(x)$ auf dem gesamten Konvergenzintervall von $T(f,0)(x)$? *Tipp: Geometrische Reihe.*

Lösung:

Zu a) Um die Taylorreihe zu bestimmen, benötigen wir alle Ableitungen von f. Es gilt:

$$\begin{aligned}
f'(x) &= \frac{1+x-x}{(1+x)^2} = \frac{1}{(1+x)^2} = (1+x)^{-2},\\
f''(x) &= -2\cdot(1+x)^{-3},\\
f'''(x) &= 6\cdot(1+x)^{-4}\\
f^{(4)}(x) &= -24\cdot(1+x)^{-5}.
\end{aligned}$$

Wir stellen folgende Vermutung auf:

$$f^{(n)}(x) = (-1)^{n+1} n! \cdot (1+x)^{-(n+1)},$$

die wir nun mittels vollständiger Induktion beweisen. Der Induktionsanfang ist bereits gemacht. Für den Induktionsschritt nehmen wir an, die Behauptung sei für ein $n \in \mathbb{N}$ bereits bewiesen (IV) und zeigen, dass sie dann auch für $n+1$ gilt. Es ist

$$\begin{aligned}
f^{(n+1)}(x) &= (f^{(n)})'(x) = \frac{d}{dx}\Big((-1)^{n+1} n! \cdot (1+x)^{-(n+1)}\Big)\\
&= -(-1)^{n+1} n!(n+1)\cdot(1+x)^{-(n+1)-1}\\
&= (-1)^{n+2}(n+1)!\cdot(1+x)^{-(n+2)}.
\end{aligned}$$

Wir erhalten also mit $f(0) = 0$ für die Taylorreihe

$$T(f,0)(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(0)}{n!}\cdot x^n = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} n!}{n!} x^n = \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n.$$

Zu b) Die Taylorreihe ist eine Potenzreihe mit den Koeffizienten $a_n = (-1)^{n+1}$. Dann gilt für den Konvergenzradius R von $T(f,0)(x)$

$$R = \frac{1}{\lim\limits_{n\to\infty} \sqrt[n]{|a_n|}} = 1,$$

d.h. die Taylorreihe konvergiert für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$.

Zu c) Aus der Taylorformel

$$f(x) = T_n(f, x_0)(x) + R_n(f, x_0)(x)$$

folgt, dass $T(f, x_0)(x) = f(x)$ genau dann gilt, wenn $\lim\limits_{n\to\infty} R_n(f, x_0)(x) = 0$. Wir untersuchen diese Konvergenz für $|x| < \frac{1}{2}$ mit Hilfe der Lagrange-Form für das Restglied:

$$R_n(f,0)(x) = \frac{f^{(n+1)}(\xi)}{(n+1)!} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^{n+2}}{(1+\xi)^{n+2}} \cdot x^{n+1} = \frac{(-1)^n}{1+\xi} \left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1},$$

wobei ξ eine (nicht näher bekannte) Zahl zwischen 0 und x ist.
Da $|\xi| \leq |x| < \frac{1}{2}$, gilt $(1+\xi) > \frac{1}{2} > |x|$. Daraus folgt $\frac{|x|}{|1+\xi|} < 1$ und somit

$$\lim_{n\to\infty} \left(\frac{|x|}{|1+\xi|}\right)^{n+1} = 0.$$

Damit folgt

$$R_n(f,0)(x) = \underbrace{\frac{(-1)^n}{1+\xi}}_{\text{beschränkt}} \cdot \underbrace{\left(\frac{x}{1+\xi}\right)^{n+1}}_{\to 0} \xrightarrow{n\to 0} 0.$$

Dies zeigt, dass $f(x) = T(f,0)(x)$ für alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < \frac{1}{2}$.

Zu d) Wir zeigen nun, dass $f(x) = T(f,0)(x)$ auf dem ganzen Konvergenzintervall $(-1,1)$ der Taylorreihe gilt.
Für $x \in (0,1)$ könnten wir vorgehen wie in c). Da $0 < \xi < x$, gilt die gleiche Restgliedabschätzung wie in c).
Für $x \in (-1,0)$ geht dies allerdings nicht mehr, da man nicht weiß, wo $\xi \in (-1,0)$ genau liegt. Auch die Cauchy-Form des Restgliedes hilft hier nicht weiter.
Deshalb benutzen wir jetzt eine andere Methode. Beim genauen Anschauen der Funktion $f(x)$ stellen wir fest, dass $f(x)$ für $|x| < 1$ bereits der Grenzwert einer bekannten Reihe ist. Für $|x| < 1$ gilt als Grenzwert der geometrischen Reihe:

$$\frac{1}{1+x} = \frac{1}{1-(-x)} = \sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n.$$

Damit können wir $f(x)$ als Grenzwert folgender Reihe darstellen:

$$f(x) \quad = \quad x \cdot \frac{1}{1+x} = x \left(\sum_{n=0}^{\infty} (-x)^n\right)$$

$$
\begin{aligned}
&= x \cdot \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \\
&= \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{n+1} \\
&= \sum_{n=1}^{\infty} (-1)^{n+1} x^n.
\end{aligned}
$$

Diese Reihe ist aber gerade die Taylorreihe $T(f,0)(x)$, womit die Gleichheit von $f(x)$ und $T(f,0)(x)$ für alle $x \in (-1,1)$ gezeigt ist.