Humboldt-Universität zu Berlin
Institut für Mathematik
A. Filler

Aufgaben der Analytischen Geometrie und ihre Visualisierung mit POV-Ray

Viele der Aufgaben setzen die Benutzung des POV-Ray-Zusatzpaketes *`AnageoL.inc`* bzw. *`AnageoR.inc`* voraus. Beachten Sie die Beschreibungen und Hinweise in der Datei „Visualisierung von Inhalten der analytischen Geometrie mit POV-Ray“. Alle genannten Dateien finden Sie auf meiner Internetseite

`http://afiller.de`

unter der Rubrik „Downloads“. Beispiellösungen sind dort ebenfalls verfügbar.

Aufgaben zur Darstellung von Vektoren, einfache Aufgaben der Vektorrechnung

Aufgabe 1

Öffnen Sie die Datei *`AnageoL.pov`* bzw. *`AnageoR.pov`* und speichern Sie diese unter dem Namen Aufgabe1.pov. Stellen Sie 4 Punkte (als **`pluspunkt`**) im sichtbaren Bereich dar (Koordinaten von –5 ... 5), blenden Sie das Koordinatensystem **`ks5`** mit ein.

Aufgabe 2

Öffnen Sie Aufgabe 1, wählen Sie einen Vektor mit Koordinaten zwischen –3 und 3. Setzen Sie an jeden der von Ihnen dargestellten Punkte einen Pfeil, der den von Ihnen gewählten Vektor beschreibt (Befehl **`vektoranpunkt`**).

Aufgabe 3

Öffnen Sie Ihre Arbeitsdatei aus Aufgabe 1, löschen Sie einen Punkt, so dass 3 Punkte übrig bleiben (die am besten sichtbaren). Stellen Sie die Ortsvektoren dieser 3 Punkte dar.

- Welche Koordinaten haben die Ortsvektoren?

Aufgabe 4

Ihre drei Punkte aus Aufgabe 4 mögen *P*, *Q*, *R* heißen. Löschen Sie die Ortsvektoren (aber nicht die Punkte selbst) und stellen Sie die drei Verbindungsvektoren $\overrightarrow{PQ}, \overrightarrow{QR}, \overrightarrow{PR}$ dar.

Aufgabe 5

Berechnen Sie die Koordinaten der von Ihnen in Aufgabe 4 dargestellten Verbindungsvektoren. Stellen Sie nun die Verbindungsvektoren mit dem Befehl **`vektoranpunkt`** dar (Löschen Sie zunächst die in Aufgabe 4 mittels **`verbindungsvektor`** erzeugten Pfeile.)

Aufgabe 6

Gegeben sind die Vektoren $\vec{a}=\begin{pmatrix}1\\-1\\3\end{pmatrix}$ und $\vec{b}=\begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix}$. Stellen Sie $\vec{a}$ und $\vec{b}$ als Pfeile dar, so dass der zu $\vec{a}$ gehörende Pfeil im Koordinatenursprung und der zu $\vec{b}$ gehörende Pfeil in der Pfeilspitze von $\vec{a}$ beginnt.

- Berechnen Sie $\vec{a}+\vec{b}$.
- Stellen Sie $\vec{a}+\vec{b}$ als Pfeil dar, der im Koordinatenursprung beginnt.

Aufgabe 7

Gegeben sind der Punkt *P*(2;-1;2) und der Vektor $\vec{a}=\begin{pmatrix}2\\-1\\1\end{pmatrix}$.

- Stellen Sie *P* als **`pluspunkt`** und $\vec{a}$ als Pfeil, beginnend an *P* (mit **`vektoranpunkt`**) dar.
- Stellen Sie die Punkte $P+0{,}5*\vec{a}$, $P+\vec{a}$, $P+1{,}5*\vec{a}$, $P+2*\vec{a}$ sowie $P-0{,}5*\vec{a}$, $P-\vec{a}$, $P-1{,}5*\vec{a}$, $P-2*\vec{a}$ dar (als „einfache“ Punkte).
- Betrachten Sie die Darstellung aus verschiedenen Richtungen.

Aufgaben zur Beschreibung und Lage von Geraden

Aufgabe 8

Eine Gerade ist durch ihre Parametergleichung $g\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}2\\4\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}4\\-6\\-5\end{pmatrix}\ (r\in\mathbf{R})$ gegeben. Stellen Sie diese Gerade mithilfe eines geeigneten Befehls des POV-Ray-Zusatzpaketes `AnageoL.inc` bzw. `AnageoR.inc` dar. Stellen Sie außerdem den Aufpunkt und den Richtungsvektor der Geraden *g* dar.

Hinweis: Ein Befehl zur Darstellung einer Geraden, von der ein Punkt und ein Richtungsvektor gegeben sind, ist nicht vorhanden. Sie benötigen 2 Punkte, dann können Sie den Befehl **gerade (<*x*$_1$,*y*$_1$,*z*$_1$>,<*x*$_2$,*y*$_2$,*z*$_2$>, *textur*)** verwenden. Wie erhalten Sie die Koordinaten eines zweiten Punktes der Geraden?

Aufgabe 9

Stellen Sie die Punkte A(5|3|6), B(10|22|12) und C(0|7|5,5) in derselben Datei wie die Gerade *g* aus Aufgabe 8 dar. Vergrößern Sie den Wert für **intervall** so weit, bis Sie alle drei Punkte sehen, verwenden Sie das Koordinatensystem **ks10** oder **ks**. Betrachten Sie die Szene aus verschiedenen Blickwinkeln. Welche der Punkte liegen auf der Geraden? Begründen Sie Ihre Ergebnisse auch rechnerisch.

Aufgabe 10

Gegeben sind vier Geraden: $g_1\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}3\\1\\-3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-4\\2\\2\end{pmatrix}\ (r\in\mathbf{R})$, $g_2\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\-2\\5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}2\\-1\\-1\end{pmatrix}\ (r\in\mathbf{R})$,

$g_3\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}-3\\2\\3\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}1\\-0{,}5\\-0{,}5\end{pmatrix}\ (r\in\mathbf{R})$ und $g_4\colon \vec{x} = \begin{pmatrix}4{,}5\\-1{,}5\\-2{,}5\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\-3\\3\end{pmatrix}\ (r\in\mathbf{R})$.

- Stellen Sie diese vier Geraden in unterschiedlichen Farben sowie ihre Aufpunkte und Richtungsvektoren dar (notieren Sie, welche Farbe zu welcher Gerade gehört).
- Betrachten Sie die vier Geraden und stellen Sie jeweils fest, ob zwei Geraden parallel oder windschief sind oder sich schneiden. Nutzen Sie verschiedene Betrachtungswinkel, um sich sicher zu sein.
- Schätzen Sie die Koordinaten des Schnittpunktes der beiden Geraden, die sich schneiden, so genau wie möglich ab. Überlegen Sie, wie man die Schnittpunktskoordinaten berechnen kann.
- Formulieren Sie eine Aussage der Art: Zwei Geraden sind parallel, wenn für Ihre Richtungsvektoren folgendes gilt: ...

Aufgaben zur Beschreibung und Lage von Ebenen (und Geraden)

Aufgabe 11

Stellen Sie die Ebene mit der Parameterdarstellung $\varepsilon\colon\ \vec{x} = \begin{pmatrix}1\\1\\1\end{pmatrix} + r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\2\end{pmatrix} + s\cdot\begin{pmatrix}-1\\-2\\0{,}5\end{pmatrix}\ (r,s\in\mathbf{R})$ mithilfe des Befehls **ebenepar (<*x*$_P$,*y*$_P$,*z*$_P$>,<*x*$_a$,*y*$_a$,*z*$_a$>,<*x*$_b$,*y*$_b$,*z*$_b$>,*textur*)** dar. (Nutzen Sie für die Darstellung der Ebene eine transparente Textur, damit Sie sehen können, was dahinter liegt.) Stellen Sie außerdem den Aufpunkt und die beiden Richtungsvektoren der Ebene dar.

Aufgabe 12

Zeichnen Sie die Gerade, die durch die Punkte A(1|-1|1) und B(-5|1|-2) verläuft, in die Darstellung aus Aufgabe 11 ein. Schätzen Sie – so gut wie möglich – die Koordinaten des Schnittpunktes der Geraden und der Ebene.

Überlegen Sie, wie man die Schnittpunktkoordinaten exakt berechnen könnte.

Aufgabe 13

Gegeben sind die drei Punkte A (3|4|-1), B(2|-3|1) und C(0|2|-4).

- Geben Sie zwei Richtungsvektoren und eine Parametergleichung der Ebene durch A, B, und C an.
- Stellen Sie die drei Punkte, die beiden Richtungsvektoren und die Ebene grafisch dar.

Aufgabe 14

Gegeben sind eine Ebene *E* und eine Gerade *g*. Berechnen Sie (falls vorhanden) den Schnittpunkt von *E* und *g*. Stellen Sie die Ebene, die Gerade und den Schnittpunkt dar.

$$E:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}+r\cdot\begin{pmatrix}-1\\1\\0\end{pmatrix}+s\cdot\begin{pmatrix}0\\1\\1\end{pmatrix}\ (r,s\in\mathbf{R})\ ,\quad g:\ \vec{x}=\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix}+t\cdot\begin{pmatrix}1\\1\\-1\end{pmatrix}\ (t\in\mathbf{R})$$

Aufgaben zum Skalarprodukt, Winkel zwischen Vektoren und zu Normalenvektoren

Aufgabe 15

Gegeben sind zwei Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.

- Berechnen Sie die Beträge der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- Berechnen Sie das Produkt der Beträge: $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
- Berechnen Sie das Skalarprodukt der Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$.
- Vergleichen Sie das Skalarprodukt $\vec{a}\cdot\vec{b}$ mit dem Produkt der Beträge $|\vec{a}|\cdot|\vec{b}|$.
- Stellen Sie die Vektoren $\vec{a}$ und $\vec{b}$ in POV-Ray dar (als Pfeile, die im Ursprung beginnen), verwenden Sie den Befehl **`ortsvektor ( <x,y,z>, textur)`**.
- Betrachten Sie die grafische Darstellung aus verschiedenen Richtungen. Schätzen Sie den Winkel zwischen den beiden Vektoren.

a) $\vec{a}=\begin{pmatrix}-2\\5\\3\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}2\\2\\-1\end{pmatrix}$ b) $\vec{a}=\begin{pmatrix}6\\6\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}5\\4\\-1\end{pmatrix}$

c) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\6\\-4\end{pmatrix}$ d) $\vec{a}=\begin{pmatrix}3\\3\\-2\end{pmatrix},\ \vec{b}=\begin{pmatrix}6\\-4\\3\end{pmatrix}$

Können Sie einen Zusammenhang zwischen dem Winkel der beiden Vektoren und dem Skalarprodukt erkennen? Hat das Produkt der Beträge dabei eine Bedeutung?

Aufgabe 16

Gegeben ist eine Ebene *E* durch eine Koordinatengleichung der Form $Ax + By + Cz + D = 0$.

- Ermitteln Sie einen Punkt *P*, der in der Ebene *E* liegt.
- Stellen Sie die Ebene *E* durch die Anweisung **`ebene (A,B,C,D,textur)`** und den von Ihnen ermittelten Punkt mittels **`punkt (<x,y,z>, textur)`** dar.
- Stellen Sie nun außerdem den Vektor $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$, der sich aus den Koeffizienten *A*, *B* und *C* der Ebenengleichung ergibt, als Pfeil dar, der im Punkt *P* beginnt: **`vektoranpunkt (<xP,yP,zP>,<A,B,C>, textur)`**.

a) E: $2x + 3y + 4z - 4 = 0$

b) E: $2x - 1{,}5y - 3z + 4 = 0$

Welche Vermutung haben Sie hinsichtlich der gegenseitigen Lage der Ebene *E* und des Vektors $\begin{pmatrix}A\\B\\C\end{pmatrix}$?

HINWEIS:

Statt (zum Beispiel) **`pluspunkt(<2,2,5>, rot_matt)`** können Sie auch

```
#declare P=<2,2,5>;
pluspunkt(P, rot_matt)
```

eingeben. Sie können dann immer auf die Koordinaten von *P* zurückgreifen. Das ist dann sehr nützlich, wenn Sie diese mehrfach brauchen. Auch beliebige andere Objekte können Sie durch #declare festlegen.