1 (i) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Folge $(a^{\frac{1}{n}})_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a>1$ konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert.
(ii) (1 Punkt) Was ist ein Häufungspunkt einer Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ komplexer Zahlen?

Sei die Folge reller Zahlen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ definiert durch

$$a_n = \begin{cases} (-1)^n(3+\frac{1}{n}) - 5^{\frac{1}{n}}, & \text{falls } n = 3k \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^n(4+\frac{1}{n}), & \text{falls } n = 3k+1 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}, \\ (-1)^n(3+\frac{1}{n}) + 5^{\frac{1}{n}}, & \text{falls } n = 3k+2 \text{ für ein } k \in \mathbb{N}. \end{cases}$$

(iii) (3 Punkte) Bestimmen Sie **alle** Häufungspunkte der Folge. Begründen Sie!
(iv) (1 Punkt) Bestimmen Sie $\liminf_{n\to\infty} a_n$ und $\limsup_{n\to\infty} a_n$.
(v) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Teilfolge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. Begründen Sie!

Lösung: (i) Nach Voraussetzung ist $a > 1$ und damit auch $\sqrt[n]{a} > 1$. Denn wäre $\sqrt[n]{a} \leq 1$ so wäre wegen Satz 9 (6) der Vorlesung auch $(\sqrt[n]{a})^n \leq 1^n$ woraus $a \leq 1$ in Widerspruch zu $a > 1$ folgt. Insbesondere ist also $\sqrt[n]{a} - 1 > -1$. Unter Verwendung der Ungleichung von Bernoulli gilt dann:

$$a = (\sqrt[n]{a})^n = (1 + (\sqrt[n]{a} - 1))^n \geq 1 + n(\sqrt[n]{a} - 1)$$

Folglich haben wir

$$\frac{a-1}{n} \geq \sqrt[n]{a} - 1.$$

Für $\epsilon > 0$ wähle $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass $0 < \frac{a-1}{n} < \epsilon$ (wegen Eudoxos und $a - 1 > 0$ existiert so ein n_0.). Dann gilt für alle $n \in \mathbb{N}$ mit $n \geq n_0$, dass

$$0 < \sqrt[n]{a} - 1 < \epsilon,$$

und damit auch

$$|\sqrt[n]{a} - 1| < \epsilon.$$

Bemerkung: Eine korrekte Lösung ist auch $a^{\frac{1}{n}} = e^{\frac{1}{n}\log a}$, $f(x) = e^x$ ist stetig und $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\log a = 0$, sowie $e^0 = 1$.
(ii) $a \in \mathbb{C}$ heißt Häufungspunkt der Folge $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$, falls es für jedes $\epsilon > 0$ unendlich viele $n \in \mathbb{N}$ gibt mit $|a - a_n| < \epsilon$.
(iii) Die Folge wird durch drei Teilfolgen definiert. Jede dieser Teilfolgen ist Vereinigung zweier Teilfolgen, die jeweils konvergieren:

$$\begin{aligned}
\lim_{k\to\infty} a_{6k} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k}(3 + \frac{1}{6k}) - 5^{\frac{1}{6k}} = 1(3+0) - 1 = 2 \\
\lim_{k\to\infty} a_{6k+3} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+3}(3 + \frac{1}{6k+3}) - 5^{\frac{1}{6k+3}} = (-1)(3+0) - 1 = -4 \\
\lim_{k\to\infty} a_{6k+1} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+1}(4 + \frac{1}{6k+1}) = (-1)(4+0) = -4 \\
\lim_{k\to\infty} a_{6k+4} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+4}(4 + \frac{1}{6k+4}) = 1(4+0) = 4 \\
\lim_{k\to\infty} a_{6k+2} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+2}(3 + \frac{1}{6k+2}) + 5^{\frac{1}{6k+2}} = 1(3+0) + 1 = 4 \\
\lim_{k\to\infty} a_{6k+5} &= \lim_{k\to\infty} (-1)^{6k+5}(3 + \frac{1}{6k+5}) + 5^{\frac{1}{6k+5}} = (-1)(3+0) + 1 = -2.
\end{aligned}$$

Die Vereinigung der Indizes aller sechs Teilfolgen ergibt $\mathbb{N}$, und daher besteht die Menge der Häufungspunkte aus den Grenzwerten dieser Folgen $\{-4; -2; 2; 4\}$. Bei der Berechnung der Grenzwerte haben wir aus (i) benutzt, dass $\lim_{n\to\infty} 5^{\frac{1}{n}} = 1$ und dass $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} = 0$ ist ,sowie die Rechengesetze für Grenzwerte, die Summe von Folgen betreffend, angewendet.
(iv) Der $\liminf$, bzw. $\limsup$ einer Folge ist der kleinste bzw. größte Häufungspunkt. Also ist nach (iii)

$$\liminf_{n\to\infty} a_n = -4$$
$$\limsup_{n\to\infty} a_n = 4.$$

(v) Nach (iii) besitzt die Folge $(a_{2n})_{n\in\mathbb{N}}$ zwei Häufungspunkte, nämtlich 2 und 4. Daher ist sie nicht konvergent, da konvergente Folgen immer genau einen Häufungspunkt besitzen.

2 (i) (2 Punkte) Formulieren Sie das Quotientenkriterium und das Wurzelkriterium für die Konvergenz und Divergenz einer Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ komplexer Zahlen.
(ii) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz. Begründen Sie Ihre Antwort!
(a) (2 Punkte)

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{n}{2n+1})^n$$

b) (3 Punkte)

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}.$$

(iii) (3 Punkte) Begründen Sie die Konvergenz der folgenden Reihe und berechnen Sie den Grenzwert:

$$\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}).$$

Lösung: (i) Ist $a_n \neq 0$ für alle außer endlich viele n und gibt es ein $q \in (0,1)$, so dass $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \leq q$, so konvergiert die Reihe. Gilt hingegen $a_n \neq 0$ und $\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \geq 1$ für alle außer endlich viele n, so divergiert sie. Ist für ein $q \in (0,1)$ $\sqrt[n]{|a_n|} \leq q$ für alle außer endlich viele n, so konvergiert die Reihe, gilt hingegen, dass $\sqrt[n]{|a_n|} \geq 1$ für unendlich viele n, so divergiert sie.
(ii) (a) $\sqrt[n]{(\frac{n}{2n+1})^n} = \frac{n}{2n+1} = \frac{1}{2+(1/n)} < \frac{1}{2} < 1$. Also konvergiert die Reihe nach dem Quotientenkriterium.
(b) Es gilt

$$\frac{\frac{((n+1)!)^2}{2^{((n+1)^2)}}}{\frac{(n!)^2}{2^{(n^2)}}} = \frac{(n+1)^2}{2^{(n+1)^2-n^2}} = \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}}.$$

Mit dem binomischen Lehrsatz (z.B.) sieht man, dass $2^n > \binom{n}{2} = \frac{1}{2}n(n-1)$, also für $n > 1$

$$0 < \frac{(n+1)^2}{2^{2n+1}} = \frac{1}{2}\Big(\frac{n+1}{2^n}\Big)^2 < \frac{1}{2}\Big(2\frac{n+1}{n(n-1)}\Big)^2 = 2\Big(\frac{n+1}{n(n-1)}\Big)^2$$

und mit

$$\lim_{n\to\infty} 2\frac{n+1}{n(n-1)} = \lim_{n\to\infty} 2\frac{1+(1/n)}{(n-1)} = 0$$

wieder mit denselben Rechenregeln für Grenzwerte, folgt für fast alle n, dass $2\left(\frac{1+(1/n)}{(n-1)}\right)^2 < \frac{1}{2}$ ist und damit die Konvergenz aus dem Quotientenkriterium.
(iii) Die Reihe konvergiert, da die Reihen der beiden Summanden konvergieren (beide Kriterien bzw. der Fakt, dass die geometrische Reihe für Basen vom Betrag kleiner als 1 konvergieren). Es gilt insbesondere, dass $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n} = \frac{1}{1-\frac{1}{2}}$ und $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n} = \frac{1}{1-\frac{(-1)}{3}} = \frac{1}{1+\frac{1}{3}}$ und damit

$$\begin{aligned}\sum_{n=0}^{\infty}(\frac{1}{2^n}+\frac{(-1)^n}{3^n}) &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2^n}+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{3^n}\\ &= \frac{1}{1-\frac{1}{2}}+\frac{1}{1+\frac{1}{3}} = 2+\frac{3}{4} = \frac{11}{4}.\end{aligned}$$

3 (i) (1 Punkt) Definieren Sie den Begriff der gleichmäßigen Stetigkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ wobei $D \subset \mathbb{C}$.
(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie für alle reellen Zahlen $a, b \geq 0$ die Ungleichung

$$\sqrt{a+b} \leq \sqrt{a} + \sqrt{b}.$$

(iii) (3 Punkte) Beweisen Sie für alle reellen Zahlen $a, b \geq 0$:

$$|\sqrt{a} - \sqrt{b}| \leq \sqrt{|a-b|}.$$

(iv) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktion

$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}, x \mapsto \sqrt{x}$$

gleichmäßig stetig ist.

Lösung: (i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$ heißt gleichmäßig stetig, falls es zu jedem $\epsilon > 0$ ein $\delta > 0$ gibt, so dass für alle $z, z' \in D$ gilt: Aus $|z - z'| < \delta$ folgt $|f(z) - f(z')| < \epsilon$.
(ii) (Kommentar: Durch Quadrieren und Umformung durch Addition/Subtraktion kommt man zu der Aussage $2\sqrt{ab} \geq 0$.) $2\sqrt{ab} \geq 0$ gilt, da die Wurzeln existieren $(a, b \geq 0)$ und nichtnegativ sind (Definition der Wurzel)). Es folgen jeweils aus der vorangegangenen Ungleichung nacheinander

$$\begin{aligned} 2\sqrt{ab} &\geq 0 \\ a + 2\sqrt{ab} + b &\geq a + b \\ (\sqrt{a} + \sqrt{b})^2 &\geq (\sqrt{a+b})^2 \\ \sqrt{a} + \sqrt{b} &\geq \sqrt{a+b}. \end{aligned}$$

Bei der zweiten Umformung benutzen wir den binomischen Lehrsatz, bei der letzten die Monotonie der Wurzel.
(iii) Es gibt zwei Fälle $a \geq b$ und $a < b$, die völlig analog gehen wegen der Symmetrie der Ausdrücke. Sei also $a \geq b$, dann ist $|\sqrt{a} - \sqrt{b}| = \sqrt{a} - \sqrt{b}$ und $\sqrt{|a-b|} = \sqrt{a-b}$. Nach (ii) gilt aber $\sqrt{a-b} + \sqrt{b} \geq \sqrt{(a-b)+b} = \sqrt{a}$. Daraus folgt nach Umstellen die Behauptung.
(iv) Sei $\epsilon > 0$ gegeben. Wählen $\delta := \epsilon^2 > 0$. Seien nun $z, z' \in [0, \infty)$ und sei $|z - z'| < \epsilon^2$. Dann ist

$$|\sqrt{z'} - \sqrt{z}| \leq \sqrt{|z' - z|} < \sqrt{\epsilon^2} = \epsilon$$

wobei wir (iii) und die Monotonie der Wurzelfunktion (bzw. alternativ Satz 9 (6) in derselben Weise wie bei Aufgabe 1 (i) benutzen).

4 (i) (1 Punkt) Definieren Sie den Begriff der Differenzierbarkeit einer Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ in einem Punkt $x_0 \in D$ wobei $D \subset \mathbb{R}$.
(ii) (4 Punkte) Formulieren Sie die Produktregel und beweisen Sie diese.
(iii) (2 Punkte) Berechnen Sie die erste Ableitung von $f(x) = x^2 e^x$
(iv) (3 Punkte) Bestimmen Sie alle Ableitungen von $g(x) = xe^x$. Stellen Sie eine Vermutung auf und beweisen Sie diese durch vollständige Induktion.

Lösung: (i) Eine Funktion $f : D \to \mathbb{R}$ heißt differenzierbar in $x_0 \in D$, falls x_0 in D nicht isoliert ist und der Grenzwert

$$f'(x_0) := \lim_{x \to x_0} \frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$$

existiert.
(ii) Sind $f, g : D \to \mathbb{R}$ differenzierbar in $x_0 \in D$ so ist auch ihr Produkt fg in x_0 differenzierbar und es gilt

$$(fg)'(x_0) = f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).$$

Das folgt aus folgender Rechnung:

$$\begin{aligned}
\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)g(x) - f(x_0)g(x_0)}{x - x_0} &= \lim_{x \to x_0} \frac{(f(x)g(x) - f(x_0)g(x)) + (f(x_0)g(x) - f(x_0)g(x_0))}{x - x_0} \\
&= \lim_{x \to x_0} g(x)\frac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0} + \lim_{x \to x_0} f(x_0)\frac{g(x) - g(x_0)}{x - x_0} \\
&= f'(x_0)g(x_0) + f(x_0)g'(x_0).
\end{aligned}$$

Dabei haben wir die Rechenregeln für Grenzwerte der Addition und Multiplikation benutzt, die Voraussetzung der Differenzierbarkeit von f und g in x_0 als auch die Tatsache, dass daraus die Stetigkeit von g in x_0 folgt.

(iii) $f'(x) = 2xe^x + x^2e^x = (2x + x^2)e^x$ unter Benutzung von $\frac{d}{dx}(e^x) = e^x$ und $\frac{d}{dx}(x^2) = 2x$ und der Produktregel.

(iv) Vermutung: Für die k-te Ableitung von g gilt $g^{(k)}(x) = (x+k)e^x$. Beweis über vollständige Induktion. Die Aussage ist korrekt für $k = 0$. Angenommen $g^{(k)}(x) = (x+k)e^x$ für ein $k \in \mathbb{N}$. Dann gilt

$$g^{(k+1)} = g^{(k)\prime}(x) = ((x + k)e^x)' = (x + k)e^x + e^x = (x + k + 1)e^x = (x + (k + 1))e^x.$$