Prüfungsklausur **zur Vorlesung Analysis I***

21.03.2013

Prof. Klaus Mohnke
und Mitarbeiter

Nachname, Vorname:

Matrikelnummer:

- Zum Bearbeiten der Prüfungsklausur haben Sie 120 Minuten Zeit.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Nach- und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer ein.
- Die Ihnen aus der Vorlesung bekannten Sachverhalte können Sie uneingeschränkt benutzen, es sei denn, dass explizit nach einem Beweis gefragt ist.
- Aussagen aus Teilaufgaben dürfen verwendet werden, auch wenn diese nicht bearbeitet wurden.
- Ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt mit Notizen ist zugelassen.
- Weitere Hilfsmittel sowie elektronische Geräte sind *nicht zugelassen*. Handys müssen ausgeschaltet sein.
- Die Klausur gilt als bestanden, wenn die Hälfte der Punkte erreicht wurden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	*4*	Σ
maximale Punktezahl	*10*	*10*	*10*	*10*	40
erreichte Punktezahl					
Korrektor					

Bewertung:	
Berlin, den 21.3.2013	

1 (i) (1 Punkt) Nennen Sie die Axiome der Anordnung für einen Körper.
Seien a, b zwei reelle Zahlen mit $0 \leq a \leq b$.
(ii) (3 Punkte) Beweisen Sie die Ungleichung

$$\sqrt{ab} \leq \frac{a+b}{2}.$$

(iii) (3 Punkte) Wir betrachten die Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ mit $a_0 = a$, $b_0 = b$ und $a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n}$ sowie $b_{n+1} = \frac{a_n+b_n}{2}$ für $n \geq 0$. Zeigen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$ die Ungleichungen

$$a_n \leq a_{n+1} \leq b_{n+1} \leq b_n.$$

(iv) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die beiden Folgen $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ und $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent sind und ihre Grenzwerte übereinstimmen.

Lösung: (i) Eine Anordnung auf einem Körper $\mathbb{K}$ ist eine Teilmenge $\mathbb{K}_+ \subset \mathbb{K}$, für die gilt
(1) für jedes $x \in \mathbb{K}$ ist entweder $x = 0$, $x \in \mathbb{K}_+$ oder $-x \in \mathbb{K}_+$,
(2) für alle $x, y \in \mathbb{K}_+$ ist $x + y \in \mathbb{K}_+$ und $xy \in \mathbb{K}_+$.

(ii) Wegen der Eigenschaft (2) gilt $(\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 \geq 0$ Daraus folgt:

$$0 \leq (\sqrt{a} - \sqrt{b})^2 = a + b - 2\sqrt{a}\sqrt{b} = a + b - 2\sqrt{ab}.$$

Das ist per Definition gleichbedeutend mit

$$2\sqrt{ab} \leq a + b,$$

Multiplikation mit $\frac{1}{2}$ schliesslich die Behauptung (man nutzt noch einmal (2) und die Folgerung $x \in \mathbb{K}_+ \Rightarrow x^{-1} \in \mathbb{K}_+$.
(iii) Induktiv beweist man $a_n > 0$ und $b_n > 0$ für alle n (ohne Punktabzug, falls nicht ausgeführt). Dann folgt wegen (ii) für alle n

$$a_{n+1} = \sqrt{a_n b_n} \leq \frac{a_n + b_n}{2} = b_{n+1}.$$

Da $a \leq b$ vorausgesetzt war gilt $a_n \leq b_n$ für alle n. Nun folgt wegen $a_n \geq 0$, dass $a_n^2 \leq a_n b_n$ und unter Benutzung der Monotonie der Wurzelfunktion

$$a_n = \sqrt{a_n^2} \leq \sqrt{a_n b_n} = a_{n+1}$$

und

$$b_{n+1} = \frac{a_n + b_n}{2} \leq \frac{b_n + b_n}{2} = b_n.$$

Bemerkung: Bis auf für die allererste Behauptung (die nicht negativ bewertet wurde) erfordert der Beweis der Behauptung keine vollständige Induktion.
(iv) Aufgrund von (iii) ergibt sich, dass (a_n) eine nach oben beschränkte monoton wachsende und (b_n) eine nach unten beschränkte monoton fallende Folge reeller Zahlen und damit konvergent ist. Es gilt

$$\lim_{n\to\infty} b_n = \lim_{n\to\infty} b_{n+1} = \lim_{n\to\infty} \frac{a_n + b_n}{2} = \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} a_n + \frac{1}{2} \lim_{n\to\infty} b_n.$$

Subtraktion von $\lim_{n\to\infty} b_n$ und Multiplikation mit 2 ergibt

$$\lim_{n\to\infty} a_n = \lim_{n\to\infty} b_n.$$

2 (i) (1 Punkt) Was ist das Cauchyprodukt zweier Reihen $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$?
(ii) (1 Punkt) Formulieren Sie eine hinreichende Bedingung an zwei gegebene Reihen, unter der deren Cauchyprodukt konvergiert.
(iii) (4 Punkte) Begründen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} z^n$ für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ absolut konvergiert. Bestimmen Sie den Grenzwert für alle diese z. Beweisen Sie die entsprechende Formel.
(iv) (4 Punkte) Beweisen Sie die folgende Aussage: Für alle $z \in \mathbb{C}$ mit $|z| < 1$ gilt

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n = \frac{1}{(1-z)^2}.$$

Lösung: (i) Das Cauchyprodukt der beiden Reihen ist die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} c_k$ mit $c_k := \sum_{l=0}^{k} a_l b_{k-l}$.
(ii) Diese Reihe konvergiert (sogar absolut), wenn jede der beiden Reihen absolut konvergiert. (Bemerkung: i.Allg. konvergiert das Cauchyprodukt nicht, selbst wenn beide Reihen konvergent sind.)
(iii) Die gegebene Reihe ist die geometrische Reihe. Diese konvergiert bekanntermaßen für $|z| < 1$ absolut. Es gilt $\sum_{k=0}^{\infty} z^k = \frac{1}{1-z}$. Der geforderte folgende Beweis dieser Formel zeigt beide Behauptungen (obwohl dies nicht explizit gefordert war): Es gilt für alle $z \in \mathbb{C}$

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{1-z^{n+1}}{1-z}.$$

(Formel durfte aus Vorlesung zitiert werden. Lässt sich leicht per Induktion beweisen). Für $|z| < 1$ gilt $\lim_{n\to\infty} z^n = 0$ (Zitat aus Vorlesung). Dann folgt mit Additions- und Quotientenregel für Grenzwerte komplexer Folgen:

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=0}^{n} z^k = \lim_{n\to\infty} \frac{1-z^{n+1}}{1-z} = \frac{1-0}{1-z} = \frac{1}{1-z}.$$

Dabei benutzt man, dass der Nenner, $1-z \neq 0$ für z mit $|z| < 1$ ist.
(iv) Da die geometrische Reihe für $|z| < 1$ absolut konvergiert, konvergiert auch das Cauchyprodukt der Reihe mit sich selbst und zwar gegen das Quadrat der Reihe. Also folgt:

$$\frac{1}{(1-z)^2} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^k z^{n-k} = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n} z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(n+1)z^n,$$

da die endliche Summe im vorletzten Ausdruck immer genau $(n+1)$ mal derselbe Summand, z^n, addiert wird.

3 (i) (2 Punkte) Definieren Sie punktweise und gleichmäßige Konvergenz von Funktionenfolgen $(f_n)_{n\in\mathbb{N}}$ wobei $f_n : D \to \mathbb{C}$ Funktionen mit Definitionsbereich $D \subset C$ sind.
(ii) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die Funktionenfolge $(f_n)_{n\geq 1}$ mit $f_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$f_n(x) := \begin{cases} 4x(1-nx) & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

gleichmäßig konvergiert und bestimmen Sie ihre Grenzwertfunktion.
(iii) (3 Punkte) Beweisen Sie, dass die Folge $(g_n)_{n\geq 1}$ mit $g_n\colon [0,1] \to \mathbb{R}$,

$$g_n(x) := \begin{cases} 4nx(1-nx) & x \in [0, \frac{1}{n}] \\ 0 & x \in (\frac{1}{n}, 1] \end{cases}$$

punktweise konvergiert.
(iv) (2 Punkte) Entscheiden Sie, ob die Funktionenfolge $(g_n)_{n\geq 1}$ aus Teilaufgabe (ii) gleichmäßig konvergent ist. Begründen Sie!

LLosung: (i) (f_n) konvergiert punktweise gegen eine Funktion $f : D \to \mathbb{C}$, falls für jedes $x \in D$ $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$.
(f_n) konvergiert gleichmäßig gegen f, falls $\lim_{n\to\infty} \|f_n - f\| = 0$ wobei für $g : D \to \mathbb{C}$ die Supremumsnorm $\|.\|$ durch $\|g\| := \sup\{|g(x)| \mid x \in D\}$ definiert wird.
(ii) Man muss zunächst die Grenzfunktion bestimmen. Da gleichmäßige Konvergenz die punktweise Konvergenz impliziert, bestimmen wir den punktweisen Grenzwert (dies auszuführen, war nicht verlangt, wird aber in (iii) sowieso gebraucht). Offenbar ist $f_n(0) = 0$ für alle n. Ist $x > 0$ so existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\frac{1}{n_0} < x$ und dann ist $\frac{1}{n} < x$ für alle $n \geq n_0$. Insbesondere ist $x \in (\frac{1}{n}, 1]$ und demnach $f_n(x) = 0$ für alle $n \geq n_0$. Also ist auch hier $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = 0$ und die konstante Funktion 0 der Kandidat für den gleichmäßigen Grenzwert. Es gilt tatsächlich für $x \in [0, \frac{1}{n}]$

$$\begin{aligned} |f_n(x) - 0| &= 4x(1-nx) = 4x - 4nx^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n} + 4x - 4nx^2 = \frac{1}{n} - \frac{1}{n}(1 - 4nx + 4(nx)^2) \\ &= \frac{1}{n} - \frac{1}{n}(1-2nx)^2 \leq \frac{1}{n}. \end{aligned}$$

(Das kann man auch sehen, indem man bemerkt dass dies eine quadratische Funktion ist, deren Nullstellen gerade 0 und $\frac{1}{n}$ sind, und deren Maximum genau dazwischen, bei $\frac{1}{2n}$ liegt. Dies rechnet man dann aus und bekommt $\frac{1}{n}$.)
Auf dem Rest des Intervalls ist f_n konstant Null. Es folgt also

$$\|f_n - 0\| = \frac{1}{n}$$

und $\lim_{n\to\infty} \|f_n - 0\| = 0$.
(iii) Der punktweise Grenzwert von g_n wird genauso wie der von f_n bestimmt und es ergibt sich wieder die konstante Funktion 0.
(iv) Diesmal ergibt sich für $x \in [0, \frac{1}{n}]$

$$|g_n(x) - 0| = 4nx(1-nx) = 1 - (1-2nx)^2$$

(einfach die obige Gleichung mit n multiplizieren). Der Maximalwert wird (wie vorher auch) in $\frac{1}{2n}$ angenommen und ist 1. Das heißt

$$\|g_n - 0\| = 1$$

und damit $\lim_{n\to\infty} \|g_n - 0\| = 1 \neq 0$, d.h. die Reihe konvergiert nicht gleichmäßig.

4 (i) (1 Punkt) Geben Sie ein Kriterium in Termen der ersten Ableitung einer differenzierbaren Funktion $f : (a, b) \to \mathbb{R}$ dafür an, dass f monoton wachsend ist.
(ii) (4 Punkte) Seien $f, g : [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und differenzierbar auf (a, b). Sei $f(a) = g(a)$ und $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a, b)$. Zeigen Sie, dass dann $f(x) < g(x)$ für alle $x \in (a, b]$.
(iii) (5 Punkte) Beweisen Sie: Für jedes $x \neq 0$ gilt:

$$\exp(x) > 1 + x.$$

Lösung: (i) Ist $f'(x) \geq 0$ für alle $x \in (a, b)$, so ist f monoton wachsend. Gilt für jedes $x \in (a, b)$ die strikte Ungleichung $f'(x) > 0$, so ist f sogar streng monoton wachsend.

(ii) Betrachte die Differenz $h : [a, b] \to \mathbb{R}$, $h(x) := g(x) - f(x)$ für alle $x \in [a, b]$. Dann ist $h(0) = 0$ und $h'(x) = g'(x) - f'(x) > 0$ für alle $x \in (a, b)$. Also ist nach (i) h streng monoton wachsend und damit $g(x) - f(x) = h(x) > 0$ für alle $x \in (a, b]$. Daraus folgt aber durch Addition von $f(x)$ die Behauptung.

(iii) Setzen $g(x) = \exp(x)$ und $f(x) = 1 + x$. Es gilt $g'(x) = \exp(x)$ und $f'(x) = 1$. Für $x > 0$ ist $\exp(x) > 1$ (z.B. weil $\exp(x) = 1 + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{x^k}{k!}$ und die Summe nur nichtnegative Summanden entält). Andererseits $g(0) = \exp(0) = 1 = 1 + 0 = f(0)$. Damit können wir (ii) anwenden (auf jedes Intervall $[0, a]$) und erhalten die Ungleichung für $x > 0$. (3 Punkte)

Für $x < 0$ betrachten wir $g(y) := \exp(-y)$ und $f(y) = 1 - y$. Es gilt wieder $f(0) = g(0) = 1$, aber $g'(y) = -\exp(-y)$ sowie $f'(y) = -1$. Für $y > 0$ ist ist $-\exp(-y) = -\frac{1}{\exp(y)} > -1$ und damit wieder $g(y) > f(y)$ für alle $y > 0$. Mit $x = -y$ folgt $\exp(x) > 1 + x$ für alle $x < 0$.
(2 Punkte)

Alternativ kann man annehmen, dass die Ungleichung nicht erfüllt sei, den Zwischenwert anwenden und einen Widerspruch zu $\exp(x) > 1$ für $x > 0$ bzw. $\exp(x) < 1$ für $x < 0$ produzieren.