Probeklausur **zur Vorlesung Analysis I**

18.12.2012

Prof. Klaus Mohnke
und Mitarbeiter

Nachname, Vorname:	
Matrikelnummer:	

- Zum Bearbeiten der Probeklausur haben Sie neunzig Minuten Zeit.
- Tragen Sie auf diesem Deckblatt und jedem weiteren Blatt Ihren Nach- und Vornamen sowie Ihre Matrikelnummer ein.
- Die Ihnen aus der Vorlesung bekannten Sachverhalte können Sie uneingeschränkt benutzen, es sei denn, dass explizit nach einem Beweis gefragt ist.
- Ein beidseitig von Hand beschriebenes Blatt mit Notizen ist zugelassen.
- Weitere Hilfsmittel sowie elektronische Geräte sind *nicht zugelassen*. Handys müssen ausgeschaltet sein.
- Die Klausur gilt als bestanden, wenn die Hälfte der Punkte erreicht wurden.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

Aufgabe	*1*	*2*	*3*	Σ
maximale Punktezahl	*10*	*10*	*10*	30
erreichte Punktezahl				
Korrektor				

Bewertung:	
Berlin, den 18.12.2012	

1 (a) (3 Punkte) Wenden Sie die Anordnungsaxiome an, um zu zeigen, dass für alle positiven reellen Zahlen a, b und jede natürliche Zahl $n > 0$ gilt:

$$a < b \Leftrightarrow a^n < b^n.$$

(b) (4 Punkte) Zeigen Sie für alle $a, b \in \mathbb{R}$ mit $0 < a < b$ und jede natürliche Zahl $n > 0$:

$$b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2}b.$$

(c) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass für alle a, b wie in Teil (b) der Aufgabe die Folge $\{\sqrt[n]{a^n + b^n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

2 (a) (5 Punkte) Formulieren und beweisen Sie die Bernoulli-Ungleichung.

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie für jede natürliche Zahl $n \geq 1$ die Ungleichung

$$(1 + \frac{1}{n})^n < (1 + \frac{1}{n+1})^{n+1}.$$

(c) (2 Punkte) Zeigen Sie, dass die Folge $\{(1 + \frac{1}{n})^n\}_{n\geq 1}$ konvergent ist.

3 (a) (5 Punkte) Beweisen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ die Formel

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k(k+1)(k+2)} = -\frac{n}{(n+1)(n+2)}.$$

(b) (2 Punkte) Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k(k+1)(k+2)}$$

konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

(c) (3 Punkte) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{k-2}{k(k+1)(k+2)} x^k.$$