Probeklausur **zur Vorlesung Analysis I (V2)** Prof. Klaus Mohnke
18.12.2012 und Mitarbeiter

- Diese Probeklausur ist zum selbständigen Üben. Zum Bearbeiten sollten neunzig Minuten Zeit genügen.
- Die Ihnen aus der Vorlesung bekannten Sachverhalte können Sie uneingeschränkt benutzen, es sei denn, dass explizit nach einem Beweis gefragt ist.

Wir wünschen Ihnen viel Erfolg.

1

(a) (3 Punkte) Es bezeichne $\max(a,b)$ das Maximum von zwei reellen Zahlen a und b. Beweisen Sie die Formel

$$\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b) + \frac{1}{2}|a-b|.$$

(b) (3 Punkte) Zeigen Sie: Ist $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzert a, dann konvergiert die Folge $\{|a_n|\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

(c) (4 Punkte) Es seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei konvergente reelle Folgen mit Grenzwerten a bzw. b. Zeigen Sie, dass die Folge $\{c_n = \max(a_n, b_n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $\max(a,b)$ konvergiert.

Hinweis: Sie können Teile (a) und (b) der Aufgabe benutzen, auch wenn Sie diese nicht gemacht haben.

2

(a) (2 Punkte) Geben Sie den Real- und den Imaginärteil der komplexen Zahl i^n in Abhängigkeit von $n \in \mathbb{N}$ an.

(b) (5 Punkte) Beweisen Sie für jede komplexe Zahl z und jedes $n \geq 1$ die Formel

$$(1-z)^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1} (k+1) z^k \right) = 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}.$$

(c) (3 Punkte) Berechnen Sie den Real- und den Imaginärteil von

$$\sum_{k=0}^{6} (k+1) i^k.$$

3

(a) (3 Punkte) Zeigen Sie, dass die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent ist.

(b) (3 Punkte) Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$.

(c) (4 Punkte) Bestimmen Sie alle $x \in \mathbb{R}$, für welche die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ konvergent ist. Begründen Sie!