Musterlösung Probeklausur 1

Analysis I WS 2012/2013

Aufgabe 1

(a) Zunächst folgen durch n-maliges Anwenden von Anordnungsaxiom $(A2)$ aus $a > 0$ und $b > 0$ die Ungleichungen $a^n > 0$ und $b^n > 0$. Zeigen jetzt für jedes $n \geq 1$:

- $a < b \Rightarrow a^n < b^n$. Benutzen vollständige Induktion nach n.

  Induktionsanfang: $a < b \Rightarrow a = a^1 < b = b^1$.
  Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a^n < b^n$ für ein $n \geq 1$.
  Induktionsschritt: Mit (A2) und wegen $a > 0$ folgt aus $a^n < b^n$ die Ungleichung $a^{n+1} < a \cdot b^n$ (vgl. VL Satz 9.4). Wegen $a < b$ und $b^n > 0$ gilt andererseits $a \cdot b^n < b^{n+1}$. Aus beiden Ungleichungen zusammen folgt $a^{n+1} < a \cdot b^n < b^{n+1}$.

- $a < b \Rightarrow a^n < b^n$. Wegen Axiom (A1) genügt es, die Implikation $a \geq b \Rightarrow a^n \geq b^n$ zu beweisen. Benutzen wieder vollständige Induktion nach n.

  Induktionsanfang: $a \geq b \Rightarrow a = a^1 \geq b = b^1$.
  Induktionsvoraussetzung: Es gelte $a^n \geq b^n$ für ein $n \geq 1$.
  Induktionsschritt: Mit dem selben Argument wie oben folgt aus $a \geq b$ die Implikation $a^n \geq b^n \Rightarrow a^{n+1} \geq b^n \cdot a$ und die Ungleichung $a \cdot b^n \geq b^{n+1}$. Zusammen also $a^{n+1} \geq b^{n+1}$.

(b) Wegen (a) ist $a^n > 0$ und $b^n > 0$. Durch zweimalige Anwendung von (A2) (vgl. VL Satz 9.3) folgt $b^n < a^n + b^n < b^n + b^n = 2 \cdot b^n$. Mit (a) folgt hieraus $b < \sqrt[n]{a^n + b^n} < \sqrt[n]{2} \cdot b$.

(c) Die konstante Folge $(c_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $c_n := b$ für alle n erfüllt insbesondere $\lim_{n \to \infty} c_n = b$. Weiterhin konvergiert die Folge $(d_n)_{n \in \mathbb{N}}$ mit $d_n := \sqrt[n]{2} \cdot b$ gegen b, da $\lim_{n \to \infty} \sqrt[n]{2} = 1$ (vgl. VL Satz 28.2). Da nach (b) $c_n < \sqrt[n]{a^n + b^n} < d_n$ für jedes $n \geq 1$ gilt, konvergiert die Folge $(\sqrt[n]{a^n + b^n})_{n \in \mathbb{N}}$ ebensfalls gegen b (vgl. VL Satz 28, Folgerung 2).

Aufgabe 2

(a) Für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n \geq 1$ und jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $x \geq -1$ gilt die Ungleichung

$$(1 + x)^n \geq 1 + nx,$$

wobei Gleichheit genau dann eintritt, wenn mindestens eine der Bedingungen $n = 1$ oder $x = 0$ erfüllt ist.

Beweis mithilfe vollständiger Induktion nach n.
Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist $(1 + x)^n = 1 + x = 1 + 1 \cdot x$ für alle x.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte $(1 + x)^n \geq 1 + nx$ für ein $n \geq 1$ und alle $x \geq -1$.
Induktionsbehauptung: Zeigen, dass $(1 + x)^{n+1} \geq 1 + (n + 1)x$ für alle $x \geq -1$ gilt, wobei Gleichheit genau für $x = 0$ eintritt. Da $1 + x \geq 0$ gilt, folgen aus der Induktionsvoraussetzung und der Tatsache, dass $x^2 \geq 0$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$, die Ungleichungen

$$(1 + x)^{n+1} = (1 + x)^n (1 + x) \geq (1 + nx)(1 + x) = 1 + (n + 1)x + x^2 \geq 1 + (n + 1)x.$$

Gleichheit gilt genau für $x^2 = 0 \Leftrightarrow x = 0$.

(b) Wir haben die folgenden Äquivalenzen:

$$(1+\frac{1}{n})^n < (1+\frac{1}{n+1})^{n+1} \Leftrightarrow (n+1)^{2n+1} < n^n(n+2)^{n+1} \Leftrightarrow \frac{n+1}{n+2} < \frac{n^n(n+2)^n}{(n+1)^{2n}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{(n+2)-1}{n+2} < (\frac{(n+1)^2-1}{(n+1)^2})^n \Leftrightarrow 1-\frac{1}{n+2} < (1-\frac{1}{(n+1)^2})^n.$$

Da $x := -\frac{1}{(n+1)^2} \geq -1/4 > -1$, folgt andererseits aus (a):

$$(1-\frac{1}{(n+1)^2})^n \geq 1-\frac{n}{(n+1)^2} > 1-\frac{n}{n(n+2)} = 1-\frac{1}{n+2},$$

was zu beweisen war.

(c) Da die Folge $((1+1/n)^n)_{n\geq 1}$ nach (b) monoton ist, genügt es zu zeigen, dass sie beschränkt ist (vgl. VL Satz 35). Wir berechnen für $n \geq 1$

$$\frac{1}{(1+\frac{1}{2n})^{2n}} = (\frac{2n}{2n+1})^{2n} = ((1-\frac{1}{2n+1})^n)^2 \geq (1-\frac{n}{2n+1})^2 > (1-\frac{1}{2})^2 = \frac{1}{4},$$

wobei wir benutzt haben, dass wegen $x := -1/(2n+1) > -1$ und (a) die Ungleichung $(1 - 1/(2n+1))^n \geq 1 - n/(2n+1)$ gilt. Hieraus folgt $(1+1/2n)^{2n} < 4$ für alle $n \geq 1$ und daraus wegen (b) $(1+1/n)^n < 4$ für alle $n \geq 1$.

Aufgabe 3

(a) Die Gleichung kann mittels vollständiger Induktion gezeigt werden. Für den Induktionsanfang $n = 1$ gilt, dass

$$\text{RS} = -\frac{1}{6} \qquad \text{sowie} \qquad \text{LS} = \frac{1-2}{1\,(1+1)\,(1+2)} = -\frac{1}{6}\,.$$

Für den Induktionsschritt $n \to n+1$ gilt

$$\sum_{k=1}^{n+1} \frac{k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} = \sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} + \frac{n+1-2}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$\overset{(IV)}{=} \frac{-n}{(n+1)\,(n+2)} + \frac{n-1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = \frac{-n^2-3n+n-1}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}$$

$$= \frac{-(n+1)^2}{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)} = -\frac{n+1}{(n+2)\,(n+3)}\,.$$

Somit gilt für alle $n \in \mathbb{N}$

$$\sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} = -\frac{n}{(n+1)\,(n+2)}\,.$$

(b) Nach Aufgabenteil (a) gilt für die Folge der Partialsummen der Reihe, dass

$$s_n := \sum_{k=1}^{n} \frac{k-2}{k\,(k+1)\,(k+2)} = -\frac{n}{(n+1)\,(n+2)} = -\frac{1/n}{(1+1/n)\,(1+2/n)}\,.$$

Nach den Grenzwertsätzen (vgl. VL Satz 31 und Satz 32) gilt nun $s_n \to 0$. Die Reihe konvergiert also und der Grenzwert ist 0.

(c) *Nebenbemerkung: In Teil (b) wurde soeben gezeigt, dass die betrachtete Potenzreihe für $x = 1$ konvergent ist, d. h. der Konvergenzradius muss größer oder gleich 1 sein.*

Zur Berechnung des Konvergenzradius benutzen wir die folgende Folgerung aus dem Quotientenkriterium (vgl. VL Satz 50 c)): Ist (a_n) die Folge der Koeffizienten einer Potenzreihe und sind fast alle $a_n \neq 0$, so ist der Konvergenzradius gegeben durch $R := \lim_{n\to\infty} |a_n/a_{n+1}|$, falls der Grenzwert existiert. Hier gilt

$$\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = \left|\frac{n-2}{n\,(n+1)\,(n+2)} \cdot \frac{(n+1)\,(n+2)\,(n+3)}{n-1}\right| = \left|\frac{(n-2)\,(n+3)}{n\,(n-1)}\right|$$
$$= \left|\frac{(1-2/n)\,(1+3/n)}{1\,(1-1/n)}\right|.$$

Nach den Grenzwertsätzen gilt also, dass der Konvergenzradius gleich

$$R = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right| = 1 \qquad \text{ist.}$$