Musterlösung Probeklausur 2

Analysis I WS 2012/2013

Aufgabe 1

(a) Betrachten zwei Fälle:

Fall 1: $a \geq b$. Es ist $\max(a,b) = a$ und andererseits $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}(a-b) = a$.
Fall 2 $a < b$. Es ist $\max(a,b) = b$ und $\frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b| = \frac{1}{2}(a+b)-\frac{1}{2}(a-b) = b$.

Damit ist die Gleichheit $\max(a,b) = \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b|$ in beiden Fällen erfüllt.

(b) Aus der Dreiecksungleichung folgen die Ungleichungen $|x|-|y| \leq |x-y|$ sowie $|y|-|x| \leq |y-x|$ und daraus

$$||x|-|y|| \leq |x-y|. \tag{1}$$

für alle $x, y \in \mathbb{R}$.

Sei $\varepsilon > 0$. Da $\lim_{n\to\infty} a_n = a$, existiert ein $N \in \mathbb{N}$, so dass für alle $n \geq N$ gilt: $|a_n - a| < \varepsilon$. Wegen (1) folgt $||a_n| - |a|| \leq |a_n - a| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit konvergiert die Folge $(|a_n|)_{n\in\mathbb{N}}$ gegen $|a|$.

(c) Aus $a_n \to a$ und $b_n \to b$ folgen durch Anwendung der Grenzwertsätze (vgl. VL Satz 32) die Konvergenzen

$$\frac{1}{2}(a_n+b_n) \to \frac{1}{2}(a+b) \text{ sowie } \frac{1}{2}(a_n-b_n) \to \frac{1}{2}(a-b).$$

Mit (b) folgt

$$\frac{1}{2}|a_n-b_n| = |\frac{1}{2}(a_n-b_n)| \to |\frac{1}{2}(a-b)| = \frac{1}{2}|a-b|.$$

Zusammen mit (a) folgt

$$\max(a_n,b_n) = \frac{1}{2}(a_n+b_n)+\frac{1}{2}|a_n-b_n| \to \frac{1}{2}(a+b)+\frac{1}{2}|a-b| = \max(a,b).$$

Aufgabe 2

(a) Aus $i^2 = -1$ folgt $i^3 = i^2 i = -i$ und $i^4 = (i^2)^2 = 1$. Damit ist $i^{n+4k} = i^k$ für alle $k, n \in \mathbb{N}$ und wir finden

$$\operatorname{Re} i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k, k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{falls } n = 4k+2, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für n ungerade} \end{cases}$$

sowie

$$\operatorname{Im} i^n = \begin{cases} 1 & \text{falls } n = 4k+1, k \in \mathbb{N}, \\ -1 & \text{falls } n = 4k+3, k \in \mathbb{N}, \\ 0 & \text{für n gerade.} \end{cases}$$

(b) Wir benutzen vollständige Induktion nach n.

Induktionsanfang: Für $n = 1$ ist

$$(1-z)^2(\sum_{k=0}^{1-1}(k+1)z^k) = (1-z)^2 = 1 - 2z + z^2 = 1 - (1+1)z + 1 \cdot z^{1+1}$$

erfüllt für alle $z \in \mathbb{C}$.
Induktionsvoraussetzung: Es gelte für ein $n \geq 1$ und alle $z \in \mathbb{C}$:

$$(1-z)^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k \right) = 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1}.$$

Induktionsschritt: Wir berechnen

$$\begin{aligned} (1-z)^2 \left(\sum_{k=0}^{n}(k+1)z^k \right) &= (1-z)^2 \left(\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k + (n+1)z^n \right) \\ &= 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} + (1-z)^2(n+1)z^n \\ &= 1 - (n+1)z^n + nz^{n+1} + (n+1)z^n - 2(n+1)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2} \\ &= 1 - (n+1)z^{n+1} + (n+1)z^{n+2}. \end{aligned}$$

(c) Aus (b) folgt

$$\sum_{k=0}^{n-1}(k+1)z^k = \frac{1}{(1-z)^2}(1 - (n+1)z^n + nz^{n+1})$$

für alle $z \in \mathbb{C}$, $z \neq 1$ und $n \geq 1$. Insbesondere gilt für $z = i$ und $n = 7$:

$$\sum_{k=0}^{6}(k+1)i^k = \frac{1}{(1-i)^2}(1 - 8i^7 + 7i^8).$$

Nach (a) ist $i^7 = -i$ und $i^8 = 1$. Mit $(1-i)^2 = 1 - 2i - 1 = -2i$ folgt

$$\sum_{k=0}^{6}(k+1)i^k = \frac{8+8i}{(-2i)} = -4 + 4i.$$

Aufgabe 3

(a) Es genügt zu zeigen, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$ ein $N \in \mathbb{N}$ existiert mit $\sum_{k=1}^{N} \frac{1}{k} \geq n$. Wir berechnen für $N := 2^{2n}$:

$$\sum_{k=1}^{2^{2n}} = \sum_{m=0}^{2n-1}(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{k}) \geq \sum_{m=0}^{2n-1}(\sum_{k=2^m+1}^{2^{m+1}} \frac{1}{2^{m+1}}) = \sum_{m=0}^{2n-1} \frac{2^m}{2^{m+1}} = (2n)\frac{1}{2} = n,$$

wo wir bei der Ungleichung benutzt haben, dass $\frac{1}{k} \geq \frac{1}{2^{m+1}}$ gilt für $k \leq 2^{m+1}$.

(b) Es gilt $\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{n} = 1$ (vgl. VL satz 28.3). Hieraus folgt

$$L = \limsup_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = \lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{1/n} = 1$$

und mithilfe des Satzes von Cauchy-Hadamard (vgl. VL Satz 60(i)) ergibt sich für den Konvergenzradius: $R = 1/L = 1$.

(c) Da der Konvergenzradius von $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ nach (b) $R = 1$ ist, ist die Reihe absolut konvergent für $|x| < 1$ und divergent für $|x| > 1$ (vgl. VL Satz 59(i)). Für $x = 1$ ist die harmonische Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n}$ divergent nach (a). Für $x = -1$ ist die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} (-1)^n \frac{1}{n}$ konvergent nach dem Leibniz-Kriterium (vgl. VL Satz 48), da die Folge $(a_n = 1/n)_{n\geq 1}$ monoton fallend ist wegen $1/(n+1) < 1/n$ und da $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ gilt.