Musterlösung zu Aufgabe 2 von Serie 6

Aufgabe 2
Sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
(i) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X_n = \{x_k \ : \ k \geq n\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $a_n = \inf X_n$ und $b_n = \sup X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren und dass die Folgen $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen x konvergieren.
(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $c_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=n}^{2n} x_k)$ ebenfalls gegen x konvergiert.

Lösung

(i): Weil jede konvergente Folge beschränkt ist (siehe Vorlesung), ist die Menge $X_0 = \{x_k \ : \ k \geq 0\}$ beschränkt. Für alle $n \in \mathbb{N}$ gilt $X_n \subset X_0$, also ist auch X_n stets beschränkt. Nach dem Vollständigkeitsaxiom für $\mathbb{R}$ existieren daher $a_n = \inf X_n$ und $b_n = \sup X_n$ stets.

Sei nun $\varepsilon > 0$ beliebig. Dann gibt es zu der positiven Zahl $\varepsilon' := \frac{\varepsilon}{2}$ ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon'$ für alle $n \geq N$. Ist nun $n \geq N$ beliebig, so gilt für alle $k \geq n$

$$x - \varepsilon' < x_k < x + \varepsilon'.$$

Also ist $x - \varepsilon'$ eine untere und $x + \varepsilon'$ eine obere Schranke von X_n. Weil $a_n = \inf X_n$ die größte untere Schranke und $b_n = \sup X_n$ die kleinste obere Schranke von X_n ist, folgt $x - \varepsilon' \leq a_n \leq b_n \leq x + \varepsilon'$. Also ergibt sich

$$x - \varepsilon < x - \varepsilon' \leq a_n \leq b_n \leq x + \varepsilon' < x + \varepsilon$$

für alle $n \geq N$. Das bedeutet $|a_n - x| < \varepsilon$ und $|b_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Damit konvergieren $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen x.

(ii): **1. Möglichkeit:** Sei $\varepsilon > 0$. Dann gibt es ein $N \in \mathbb{N}$ mit $|x_n - x| < \varepsilon$ für alle $n \geq N$. Ist $n \geq N$, so gilt also auch $|x_k - x| < \varepsilon$ für $n \leq k \leq 2n$ und mit der Dreiecksungleichung folgt (man beachte auch, dass die Summation von n bis $2n$ immer $n+1$ Summanden ergibt)

$$\begin{aligned} |c_n - x| &= \left| \left(\frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \ x_k \right) - x \right| = \left| \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \ x_k - \frac{1}{n+1} \sum_{k=n}^{2n} \ x \right| \\ &= \frac{1}{n+1} \cdot \left| \sum_{k=n}^{2n} \ (x_k - x) \right| \leq \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=n}^{2n} \ |x_k - x| < \frac{1}{n+1} \cdot \sum_{k=n}^{2n} \ \varepsilon = \varepsilon. \end{aligned}$$

Weil das für alle $n \geq N$ gilt, konvergiert $\{c_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen x.

2. Möglichkeit: Für $n \in \mathbb{N}$ gilt $x_k \in X_n$ für $n \leq k \leq 2n$ und damit $a_n \leq x_k \leq b_n$. Es folgt

$$(n+1)a_n = \sum_{k=n}^{2n} \ a_n \leq \sum_{k=n}^{2n} \ x_k \leq \sum_{k=n}^{2n} \ b_n = (n+1)b_n$$

und damit $a_n \leq c_n \leq b_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$. Nach (i) konvergieren $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ gegen x. Nach Aufgabe 1(ii) konvergiert daher auch c_n gegen x.