## Lösung Blatt 6 Aufgabe 3

Für $b_n := n^{n-2}/n!$ gilt, dass $b_n \to \infty$. Um dies zu zeigen, muss man $b_{n+1}$ nach *unten* abschätzen. Weiterhin kann man annehmen, dass $n > 2$ ist.

$$\begin{aligned} b_{n+1} &= \frac{1}{(n+1)^2}\frac{(n+1)^{(n+1)}}{(n+1)!} = \frac{1}{(n+1)^2}\prod_{k=1}^{n+1}\frac{n+1}{k} \\ &= \frac{1}{(n+1)^2}\frac{n+1}{1}\frac{n+1}{2}\prod_{k=3}^{n+1}\frac{n+1}{k} = \frac{1}{2}\prod_{k=3}^{n}\frac{n+1}{k} = \frac{1}{2}\prod_{k=3}^{n}\Big(\frac{n}{k}+\frac{1}{k}\Big) \end{aligned}$$

Soweit ist noch nichts abgeschätzt. $n > 2$ muss man annehmen, um auch wirklich die ersten zwei Faktoren aus dem Produkt ziehen zu dürfen. Das letzte Produkt wird nun ausmultipliziert, wobei allerdings Summanden weggelassen werden. Deshalb gilt

$$b_{n+1} \geq \frac{1}{2}\prod_{k=3}^{n}\frac{n}{k} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{3}\prod_{k=4}^{n}\frac{n}{k} = b_n + \frac{1}{6}\,,$$

da alle $n/k > 1$.

Diese Ungleichung gilt für alle $n > 2$ und somit ist $b_{n+1} > b_3 + (n-2)/6 = n/6 + \text{const}$. Also gilt

$$\forall_{C>0}\,\exists_{N\in\mathbb{N}}\,\forall_{n>N} : b_n > C \qquad \text{d. h.} \qquad b_n \to \infty\,.$$