Musterlösung Blatt 7, Aufgabe 3

Analysis I WS 2012/2013 Prof. Mohnke

(i) Aus

$$a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n} \tag{1}$$

folgt

$$a_n \geq 0 \text{ für } n \geq 1. \tag{2}$$

Wir betrachten die Fälle $a_1 \leq a_0$ (Fall 1) und $a_1 \geq a_0$ (Fall 2) und beweisen durch vollständige Induktion nach n, dass im ersten Fall $a_{n+1} \leq a_n$ gilt für alle n und im zweiten Fall $a_{n+1} \geq a_n$ für alle n.

<u>Fall 1.</u> $a_1 \leq a_0$. Es gilt für $n \geq 0$:

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \leq a_n \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} + 1 \leq a_n + 1 \\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad & a_{n+2}^2 \leq a_{n+1}^2 \\ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad & a_{n+2} \leq a_{n+1}. \end{aligned}$$

Daraus folgt induktiv: $a_{n+1} \leq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

<u>Fall 2.</u> $a_1 \geq a_0$. Aus den Äquivalenzen

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \geq a_n \\ \Leftrightarrow \quad & a_{n+1} + 1 \geq a_n + 1 \\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad & a_{n+2}^2 \geq a_{n+1}^2 \\ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad & a_{n+2} \geq a_{n+1}. \end{aligned}$$

für jedes $n \geq 0$ folgt induktiv: $a_{n+1} \geq a_n$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

(ii) Wollen zeigen: $\{a_n\}$ ist konvergent. Da eine monotone beschränkte Folge konvergent ist, genügt es zu zeigen: Die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist beschränkt.

Aus (2) und der Bedingung $a_0 \geq -1$ folgt $a_n \geq -1$ für alle $n \in \mathbb{N}$. In Fall 1 ist außerdem $a_n \leq a_0$ für alle $n \in \mathbb{N}$. Es bleibt nur noch zu zeigen, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ in Fall 2 nach oben beschränkt ist. Für $n \geq 1$ gilt

$$\begin{aligned} & a_{n+1} \geq a_n \\ \overset{(1)}{\Leftrightarrow} \quad & \sqrt{a_n + 1} \geq a_n \\ \overset{(2)}{\Leftrightarrow} \quad & a_n + 1 \geq a_n^2 \\ \Leftrightarrow \quad & a_n^2 - a_n - 1 \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & a_n^2 - a_n - 2 \leq 0 \\ \Leftrightarrow \quad & (a_n + 1) \cdot (a_n - 2) \leq 0 \\ \Rightarrow \quad & a_n \leq 2 \end{aligned}$$

Daraus folgt $a_n \leq 2$ für $n \geq 1$ und mit $a_0 \leq a_1$ ist $a_n \leq 2$ für alle $n \in \mathbb{N}$.

Wir berechnen jetzt $a = \lim\limits_{n\to\infty} a_n$. Mit den Rechengesetzen für Grenzwerte folgen aus $a_{n+1}^2 = 1+a_n$ die Gleichheiten

$$(\lim_{n\to\infty} a_n)^2 = \lim_{n\to\infty} a_{n+1}^2 = \lim_{n\to\infty} (1+a_n) = 1 + \lim_{n\to\infty} a_n,$$

d. h.

$$a^2 = 1 + a \Rightarrow a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2} \text{ oder } a = \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{5}}{2}.$$

Da $a_n \geq 0$ für fast alle n gilt, ist $a \geq 0$ und wir folgern $a = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{5}}{2}$.