Musterlösung Blatt 7, Aufgabe 4

Analysis I WS 2012/2013 Prof. Mohnke

(i) Da $a \neq b$ ist, hat das System

$$\begin{cases} \alpha + \beta = x_0 \\ \alpha a + \beta b = x_1 \end{cases} \tag{1}$$

die eindeutig bestimmte Lösung

$$\alpha = \frac{x_0 b - x_1}{b - a}, \beta = \frac{x_0 a - x_1}{a - b}. \tag{2}$$

Wir beweisen mit vollständiger Induktion nach n, dass mit α und β wie in (2) für alle $n \geq 0$ die Formel

$$x_n = \alpha a^n + \beta b^n \tag{3}$$

gilt.

<ins>Induktionsanfang</ins> Für $n = 0$ und $n = 1$ folgt (3) aus (1).

<ins>Induktionsschritt</ins> Sei $k \geq 0$ und sei (3) für $n = k$ und für $n = k + 1$ bewiesen. Dann gilt

$$\begin{aligned} x_{k+2} = (a+b)x_{k+1} - abx_k &= (a+b)(\alpha a^{k+1} + \beta b^{k+1}) - ab(\alpha a^k + \beta b^k) \\ &= \alpha a^{k+2} + \alpha a^{k+1} b + \beta a b^{k+1} + \beta b^{k+2} - \alpha a^{k+1} b - \beta a b^{k+1} \\ &= \alpha a^{k+2} + \beta b^{k+2}. \end{aligned}$$

(ii) Für $x_0 = x_1 = 1$ ergibt sich aus (2) und (3):

$$x_n = \frac{b-1}{b-a} a^n + \frac{a-1}{a-b} b^n. \tag{4}$$

Für $0 < a < 1$ ist $\lim_{n\to\infty} a^n = 0$ und das Konvergenzverhalten von $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist wie folgt:

<ins>Fall 1</ins> $b < 1$. Dann ist $\lim_{n\to\infty} b^n = 0$ und daraus $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$.
<ins>Fall 2</ins> $b = 1$. Aus (4) folgt $x_n = 1$ für alle n, insbesondere $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
<ins>Fall 3</ins> $b > 1$. Wegen $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$ und da $a < b \Rightarrow \frac{a-1}{a-b} > 0$, ist $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

(iii) Sei $1 \leq a < b$. Haben zusätzlich zu (ii) folgende Fälle:

<ins>Fall 4</ins> $a = 1$. Aus (4) folgt $x_n = 1$ für alle n, also $\lim_{n\to\infty} x_n = 1$.
<ins>Fall 5</ins> $1 < a < b$. Hier ist $\frac{a-1}{a-b} < 0$ und aus

$$x_n = b^n \left(\frac{b-1}{b-a}\left(\frac{a}{b}\right)^n + \frac{a-1}{a-b}\right) \tag{5}$$

folgt wegen $\lim_{n\to\infty}(\frac{a}{b})^n = 0$: $x_n \to -\infty$ für $n \to \infty$.