Musterlösung Blatt 8, Aufgabe 4

Analysis I WS 2012/2013 Prof. Mohnke

(i) Aus der Konvergenz der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ folgt mithilfe des Cauchy-Kriteriums, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge ist, insbesondere eine beschränkte Folge. Ist $|a_n| < C$ für alle $n \in \mathbb{N}$, dann gilt $|a_n t^n| \leq C|t|^n$ und die Reihe

$$\sum_{n=0}^{\infty} C|t|^n = \frac{C}{1-|t|}$$

ist eine konvergente Majorante von $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. Damit ist auch diese letztere Reihe konvergent mit der Abschätzung

$$|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n| \leq \sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n t^n| \leq \frac{C|t|^{n_0}}{1-|t|} \tag{1}$$

für jedes $n_0 \geq 0$.

(ii) Sei $t \in (0,1)$ und sei $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}} \subset (-1,1)$ eine Folge mit $\lim_{k\to\infty} t_k = t \in (0,1)$. Wir müssen zeigen: Für jedes $\varepsilon > 0$ existiert $N \in \mathbb{N}$, so dass $|A(t_k) - A(t)| < \varepsilon$ gilt für alle $k \geq N$.

- Da $\lim_{k\to\infty} t_k = t$, existiert $N_1 \in \mathbb{N}$, so dass $|t - t_k| < \frac{1}{2}(1-|t|)$ gilt für alle $k \geq N_1$. Insbesondere gilt dann $|t_k| < \frac{1}{2}(1+|t|) =: s$.
- Wegen (1) und $s < 1$ existiert ein $n_0 \in \mathbb{N}$ mit $\sum_{n=n_0}^{\infty} |a_n s^n| < \varepsilon/3$ und damit $|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n| < \varepsilon/3$ sowie $|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t_k^n| < \varepsilon/3$ für $k \geq N_1$.
- Wegen der Abschätzung $|t_k^n - t^n| = |t_k - t||\sum_{m=0}^{n-1} t_k^m t^{n-1-m}| \leq |t_k - t| n s^{n-1}$ gilt

  $$|\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t_k^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t^n| \leq |t_k - t| \sum_{n=1}^{n_0-1} n s^{n-1}.$$

  Damit existiert ein $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $|\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t_k^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t^n| < \varepsilon/3$ für alle $k \geq N_2$.

Für $k \geq N := \max(N_1, N_2)$ ergibt sich:

$$|A(t_k) - A(t)| = |\sum_{n=0}^{\infty} a_n t_k^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n| = |\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t_k^n + \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t_k^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t^n - \sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n| \leq$$

$$|\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t_k^n| + |\sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t_k^n - \sum_{n=0}^{n_0-1} a_n t^n| + |\sum_{n=n_0}^{\infty} a_n t^n| < \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.$$