Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 10

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 08.01.2013)

Aufgabe 1
Bestimmen Sie den Konvergenzradius der untenstehenden Potenzreihen. Begründen Sie!
(i) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \binom{2n}{n} x^n$.
(ii) $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a^{n^2} x^n$, $a \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2
(i) Sei $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius R und sei $k \in \mathbb{N}$, $k > 0$. Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{kn}$.
(ii) Es seien $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_A bzw. R_B. Beweisen Sie, dass der Konvergenzradius R der Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n x^n$ die Ungleichung $R \geq R_A R_B$ erfüllt.

Aufgabe 3
(i) Beweisen Sie mit vollständiger Induktion nach n für alle $k, n \in \mathbb{N}$:

$$\sum_{m=0}^{n} \binom{k+m}{k} = \binom{n+k+1}{k+1}.$$

(ii) Zeigen Sie, dass für jedes $k \in \mathbb{N}$ und alle $x \in \mathbb{R}$ mit $|x| < 1$ die Formel

$$\sum_{n=0}^{\infty} \binom{k+n}{k} x^n = \frac{1}{(1-x)^{k+1}}$$

gilt.

Aufgabe 4
(i) Zeigen Sie mithilfe des Identitätssatzes: Ist $A(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ eine Potenzreihe mit Konvergenzradius $R > 0$ und gilt $A(-x) = A(x)$ (bzw. $A(-x) = -A(x)$) für alle $x \in (-R, R)$, dann ist $a_n = 0$ für jeden ungeraden (bzw. für jeden geraden) Index n.
(ii) Zeigen Sie, dass es keine Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ mit positivem Konvergenzradius R gibt, so dass $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = |x|$ gilt für alle $x \in (-R, R)$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 18.12-20.12 besprochen werden:

- Berechnen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(\frac{n!}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\right)^2 x^n$. *Hinweis*: Was ist $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{a_{n+1}}{a_n}$ für $a_n=\left(\frac{n!}{3\cdot5\cdots(2n+1)}\right)^2$?

- Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{2^n+n^2}{n}x^n$. *Hinweis*: Was ist $\lim\limits_{n\to\infty}\sqrt[n]{a_n}$ für $a_n=\frac{2^n+n^2}{n}$?

- Zeigen Sie: Sind $\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ und $\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n$ Potenzreihen mit Konvergenzradien R_A bzw. R_B, dann hat die Potenzreihe $\sum_{n=0}^{\infty}(a_n+b_n)x^n$ Konvergenzradius $R_C\geq\min(R_A,R_B)$.

- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}a_n$ mit $a_n=\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ konvergent ist, aber ihr Cauchy-Produkt $\sum_{n=2}^{\infty}(\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k})$ mit sich selbst divergiert. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $|\sum_{k=1}^{n-1}a_ka_{n-k}|\geq 1$ gilt für jedes n.

- Es sei $A(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_nx^n$ eine Potenzreihe mit positivem Konvergenzradius R und $a_0=1$. Zeigen Sie: Gilt $a_{2k-1}=\frac{1}{(2k-1)!}$ für alle $k\geq 1$ und ist

  $$A(x)A(-x)=1$$

  für alle $x\in(-R,R)$, dann ist $a_n=\frac{1}{n!}$ für alle n (d. h. $A(x)$ ist die Exponentialreihe).

  Hinweis: Benutzen Sie den Identitätssatz, um aus der Bedingung $A(x)A(-x)=1$ Gleichungen für die Koeffizienten a_{2k}, $k\in\mathbb{N}$ zu finden. Zeigen Sie dann mithilfe vollständiger Induktion und der Formel

  $$\sum_{k=0}^{n}(-1)^k\binom{n}{k}=0,$$

  dass $a_{2k}=\frac{1}{(2k)!}$ die eindeutige Lösung ist.