Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 11

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 15.01.2013)

Aufgabe 1
(i) Beweisen Sie, dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \frac{x^m-1}{x^n-1}, & \text{falls } x \neq 1 \\ \frac{m}{n} & \text{für } x = 1, \end{cases}$$

wo $m, n \in \mathbb{N}, n \neq 0$, stetig ist im Punkt $x_0 = 1$.
(ii) Zeigen Sie, dass

$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(x+iy) = \begin{cases} \frac{xy}{\sqrt{x^4+y^4}}, & \text{falls } x+iy \neq 0 \\ 0 & \text{für } x+iy = 0 \end{cases}$$

nicht stetig ist in $x_0 = 0$.

Hinweis: Betrachten Sie eine geeignete Nullfolge $\{x_n + iy_n\}_{n\in\mathbb{N}}$.

Aufgabe 2
(i) Zeigen Sie, dass für jede beschränkte Funktion $g\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$, $x \mapsto xg(x)$ stetig ist im Punkt $x_0 = 0$.
(ii) Bestimmen Sie alle $k \in \mathbb{Z}$, so dass die Funktion

$$f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} |x|x^k, & \text{falls } x \neq 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist im Punkt $x_0 = 0$.

Aufgabe 3
Für eine Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ bezeichne mit f_+ und f_- die Funktionen $f_+(x) = \max(f(x), 0)$ und $f_-(x) = \min(f(x), 0)$.

(i) Beweisen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$ die Formeln $f(x) = f_+(x) + f_-(x)$ und $|f(x)| = f_+(x) - f_-(x)$.
(ii) Zeigen Sie, dass f genau dann stetig ist, wenn f_+ und f_- beide stetig sind.

Aufgabe 4
Wir betrachten die Funktion $f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sqrt{x}$.
(i) Beweisen Sie, dass die Funktion Lipschitz-stetig ist auf $[\varepsilon, \infty)$ für jedes $\varepsilon > 0$.
(ii) Zeigen Sie, dass f nicht Lipschitz-stetig ist auf $[0, \infty)$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 08.01-10.01 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass die Funktion
$$f\colon [0,\infty) \to \mathbb{R},\ f(x) = \begin{cases} \sqrt{1+\frac{1}{x}} - \sqrt{\frac{1}{x}}, & \text{falls } x > 0 \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$
stetig ist im Punkt $x_0 = 0$.

- Bestimmen Sie $a \in \mathbb{R}$, so dass die Funktion
$$f\colon \mathbb{C} \to \mathbb{R},\ f(x+iy) = \begin{cases} \frac{x^2 y}{x^2+y^2}, & \text{falls } x+iy \neq 0 \\ a & \text{für } x+iy = 0 \end{cases}$$
stetig ist im Punkt $x_0 = 0$.

- Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine gerade (ungerade) Funktion, dann ist f genau dann stetig, wenn die Einschränkung von f auf $\mathbb{R}_{\geq 0}$ stetig ist.

- Es seien $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen mit $f(0) = g(0) = 0$. Zeigen Sie, dass die Funktion
$$h\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R},\ h(x) = \begin{cases} f(x) + g(x), & \text{falls } x \geq 0 \\ f(g(x)) & \text{für } x < 0 \end{cases}$$
stetig ist auf $\mathbb{R}$.

- Beweisen Sie, dass die Funktion $x \mapsto |x|$ auf $\mathbb{R}$ stetig und sogar Lipschitz-stetig ist.

  Formulieren Sie die Verneinung der Aussage, dass eine gegebene Funktion Lipschitz-stetig ist. Zeigen Sie, dass Polynome vom Grad $n > 1$ nicht Lipschitz-stetig sind auf ganz $\mathbb{R}$.