Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 12

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 22.01.2013)

Aufgabe 1
(i) Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, so dass $f(x+y) = f(x) + f(y)$ gilt für alle $x, y \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie, dass $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $f(x) = ax$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Setzen Sie $a = f(1)$ und zeigen Sie die Formel $f(x) = ax$ zunächst für $x \in \mathbb{Q}$. Benutzen Sie dann die Stetigkeit von f.

(ii) Sei $g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $g(x + y) = g(x)g(y)$ für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und mit $g(0) \neq 0$. Zeigen Sie, dass ein $a \in \mathbb{R}$ existiert, so dass $g(x) = \exp(ax)$ gilt für alle $x \in \mathbb{R}$.

Hinweis: Zeigen Sie, dass $g(x) > 0$ gilt für alle x und betrachten Sie die Komposition $f := \ln \circ g$.

Aufgabe 2
(i) Zeigen Sie mithilfe des Zwischenwertsatzes: Sind f und g zwei stetige Funktionen auf einem abgeschlossenen Intervall $[a, b] \subset \mathbb{R}$ und gilt $f(a) \leq g(a)$ sowie $f(b) \geq g(b)$, dann existiert ein $c \in [a, b]$ mit $f(c) = g(c)$.
(ii) Beweisen Sie, dass für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$ und jedes $t \in [1, 2]$ die Gleichung $(1 + \frac{x}{n})^n = t$ eine Lösung $x \in [0, 1]$ besitzt.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie: Ist $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und existiert $c \in (a, b)$ mit $(f(a) - f(c))(f(b) - f(c)) > 0$, dann ist f nicht injektiv.
(ii) Zeigen Sie, dass eine stetige Funktion $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ genau dann injektiv ist, wenn sie streng monoton ist.

Aufgabe 4
(i) Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Begründen Sie, dass die Reihe

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n(n-x)}$$

auf $(a, b) \setminus \mathbb{N}$ absolut und gleichmäßig konvergiert. *Hinweis:* Benutzen Sie, dass für $n > 2b$ die Ungleichung $n - x > n/2$ gilt für alle $x \in (a, b)$.
(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe nicht gleichmäßig konvergent ist auf $\mathbb{R} \setminus \mathbb{N}$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 15.01-17.01 besprochen werden:

- Zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n = \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

  Hinweise:

  - Benutzen Sie die Abschätzung $\binom{n}{k}\frac{1}{n^k} < \frac{1}{k!}$ und die binomische Formel, um die Ungleichung $(1+\frac{1}{n})^n < \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ für jedes $n \geq 1$ zu beweisen.
  - Zeigen Sie, dass $(1+\frac{1}{n})^n > \sum_{k=0}^{m}\frac{1}{k!}(1-\frac{1}{n})\cdots(1-\frac{k-1}{n})$ gilt für $2 \leq m < n$.
  - Schlussfolgern Sie aus diesen Überlegungen die Ungleichungen $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \leq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$ bzw. $\lim_{n\to\infty}(1+\frac{1}{n})^n \geq \sum_{k=0}^{\infty}\frac{1}{k!}$.

- Zeigen Sie: Ist $f\colon [a, a+2r] \to \mathbb{R}$ stetig und gilt $f(a) = f(a+2r)$, dann existiert $c \in [a, a+r]$ mit $f(c) = f(c+r)$.

  Hinweis: Wenden Sie den Zwischenwertsatz auf die Funktion $x \mapsto f(x) - f(x+r)$ auf dem Intervall $[a, a+r]$ an.

- Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion mit $(f(a)-a)(f(b)-b) < 0$. Zeigen Sie, dass ein $c \in (a,b)$ existiert mit $f(c) = c$.

- Begründen Sie, dass die Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ eine stetige Funktion $f\colon (-1,1) \to \mathbb{R}$ definiert.

- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n}x^n$ nicht gleichmäßig konvergent ist auf $(-1,1)$.