Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 13

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 29.01.2013)

Aufgabe 1
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$ und $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ eine gleichmäßig stetige Funktion.
(i) Sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (a,b)$ eine Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, oder $\lim_{n\to\infty} x_n = b$. Zeigen Sie, dass die Folge $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent ist. *Hinweis:* Zeigen Sie, dass $(f(x_n))_{n\in\mathbb{N}}$ eine Cauchy-Folge ist.
(ii) Zeigen Sie: Sind $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (x'_n)_{n\in\mathbb{N}} \in (a,b)$ zwei Folgen mit $\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} x'_n \in \{a,b\}$, dann gilt $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = \lim_{n\to\infty} f(x'_n)$. Schlussfolgern Sie zusammen mit (i), dass eine stetige Funktion $(a,b) \to \mathbb{R}$ genau dann gleichmäßig stetig ist, wenn sie eine stetige Fortsetzung auf $[a,b]$ besitzt.

Aufgabe 2
(i) Zeigen Sie, dass für jedes $x \in \mathbb{R}$ mit $s(x) := \frac{1}{2i}(\exp(ix) - \exp(-ix))$ und $c(x) := \frac{1}{2}(\exp(ix) + \exp(-ix))$ die Formeln $s(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)!} x^{2n+1}$ und $c(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n)!} x^{2n}$ gelten. (*Bemerkung:* Wie in der Vorlesung später diskutiert werden wird, sind dies Potenzreihenentwicklungen der Sinus- bzw. Cosinusfunktion).
(ii) Zeigen Sie die Formeln $\lim_{x\to 0} \frac{s(x)}{x} = 1$ und $\lim_{x\to 0} \frac{1-c(x)}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Aufgabe 3
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
(i) $\lim_{x\to 0} \frac{x^2}{|x|}$ und $\lim_{x\to\infty} \frac{x+1}{\sqrt{x^2+1}+x}$.
(ii) $\lim_{x\to 0} \frac{c(x)-(c(x))^2}{x^3+x^2}$, wo $c(x)$ wie in Aufgabe 2 definiert ist. *Hinweis:* Benutzen Sie 2(ii).

Aufgabe 4
(i) Bestimmen Sie, für welche $n \in \mathbb{N}$ die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} x^n \sin(\frac{1}{x}) & \text{für } x \neq 0, \\ 0 & \text{für } x = 0 \end{cases}$$

stetig ist im Punkt $x_0 = 0$.
(ii) Für welche $n \in \mathbb{N}$ ist f in $x_0 = 0$ differenzierbar?

Begründen Sie jeweils!

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 22.01-24.01 besprochen werden:

- Sei $D \subset \mathbb{R}$ beschränkt. Zeigen Sie, dass jede gleichmäßig stetige Funktion $f\colon D \to \mathbb{R}$ beschränkt ist. Schlussfolgern Sie, dass die Funktion $(-1,1) \to \mathbb{R}$, $x \mapsto \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n} x^n$ nicht gleichmäßig stetig ist (vgl. mit der letzten Aufgabe auf der Rückseite von Blatt 12).

- Berechnen Sie für $a > 0$ den Grenzwert $\lim_{x\to 0} \frac{a^x - 1}{x}$. *Hinweis:* Benutzen Sie die Formel $a^x = \exp((\ln a)x)$ und die Definition der Exponentialfunktion.

- Berechnen Sie die Grenzwerte $\lim_{x\to 1} \frac{x^3+x^2-x-1}{x^2-1}$, $\lim_{x\to\infty} \frac{x^2+|x|}{x^3-x^2}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{4^x-2^x}{2x}$. *Hinweis:* Benutzen Sie bei dem letzteren Grenzwert die vorhergehende Aufgabe.

- Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$,

$$f(x) = \begin{cases} \exp(-1/x) & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x \leq 0 \end{cases}$$

  beliebig oft differenzierbar ist. *Hinweis:* Benutzen Sie, dass $\lim_{x\to 0} P(\frac{1}{x}) \exp(-1/x) = 0$ gilt für jedes Polynom P.

- Zeigen Sie: Ist $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ in x_0 differenzierbar, dann existiert $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ und es gilt $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h} = f'(x_0)$.

  Zeigen Sie durch die Angabe eines expliziten Beispiels, dass aus der Existenz des Grenzwertes $\lim_{h\to 0} \frac{f(x_0+h)-f(x_0-h)}{2h}$ im Allgemeinen nicht folgt, dass f in x_0 differenzierbar ist.