Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 14

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 05.02.2013)

Aufgabe 1
(i) Berechnen Sie die ersten Ableitungen der folgenden Funktionen: $f(x) = \ln(\ln x)$, $x > 1$ und $g(x) = x^{x \ln x}$, $x > 0$.
(ii) Berechnen Sie für jedes $n \in \mathbb{N}$, $n > 0$, die n-te Ableitungsfunktion von $h(x) = x \exp(-x)$, $x \in \mathbb{R}$.

Aufgabe 2
Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ eine differenzierbare Funktion.
(i) Zeigen Sie: Gilt $f'(a) > 0$ (bzw. $f'(a) < 0$), dann existiert ein $h > 0$, so dass $f(x) > f(a)$ (bzw. $f(x) < a$) gilt für jedes $x \in (a, a+h)$.
(ii) Beweisen Sie mithilfe von (i) den folgenden Zwischenwertsatz für Ableitungen: Liegt y echt zwischen $f'(a)$ und $f'(b)$, dann existiert ein $c \in (a,b)$ mit $f'(c) = y$. *Bemerkung:* Hierbei wird nicht vorausgesetzt, dass die Ableitung von f stetig ist!

Aufgabe 3
(i) Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar. Zeigen Sie: Ist $f(a) = g(a)$ und gilt $f'(x) < g'(x)$ für alle $x \in (a,b)$, dann ist $f(x) < g(x)$ für jedes $x \in (a,b]$.
(ii) Beweisen Sie für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x \neq 0$ die Ungleichung $\exp(x) > 1 + x$ und für jedes $x \in \mathbb{R}$, $x > 1$ die Ungleichung $\ln x > 1 - 1/x$.

Aufgabe 4
(i) Beweisen Sie die Ungleichung von Jensen: Ist $D \subset \mathbb{R}$ und ist $f\colon D \to \mathbb{R}$ konvex, dann gilt für jedes $n \geq 1$ und alle positiven reellen Zahlen $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$:

$$f(\lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n) \leq \lambda_1 f(x_1) + \cdots + \lambda_n f(x_n)$$

für alle $x_1, \ldots, x_n \in D$.
(ii) Begründen Sie, dass die Logarithmusfunktion auf $(0, \infty)$ konkav ist und zeigen Sie mithilfe von (i) die gewichtete AM-GM-Ungleichung: Für alle positiven reellen Zahlen $x_1, \ldots, x_n$ und $\lambda_1, \ldots, \lambda_n$ mit $\lambda_1 + \cdots + \lambda_n = 1$ gilt

$$x_1^{\lambda_1} \cdots x_n^{\lambda_n} \leq \lambda_1 x_1 + \cdots + \lambda_n x_n.$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 29.01-31.01 besprochen werden:

- *Wiederholungsaufgabe:* Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $b \neq 1$ und sei $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ die Folge mit $x_0 = a$ und $x_{n+1} = 1 + bx_n$ für $n \geq 0$. Beweisen Sie für $n \geq 1$ die Formel $x_n = \frac{b^n-1}{b-1} + b^n a$. Bestimmen Sie, für welche Werte von a und b die Folge konvergiert und berechnen Sie im Konvergenzfall ihren Grenzwert.

- Berechnen Sie die Ableitungen folgender Funktionen: $f(x) = \exp(\exp(x) + x)$, $x \in \mathbb{R}$ und $g(x) = (\ln x)^{1/x}$, $x > 1$.

- Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ die n-te Ableitung $h^{(n)}(x)$ der Funktion $h(x) = x^2 \exp(x)$, $x \in \mathbb{R}$ durch $h^{(n)}(x) = (x^2 + 2nx + n^2 - n) \exp(x)$ gegeben ist.

- Sei $f\colon [a, b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a, b) n-mal differenzierbar, $n \geq 1$. Zeigen Sie: Falls $n + 1$ paarweise verschiedene Elemente $x_0, x_1, \ldots, x_n \in (a, b)$ existieren mit $f(x_j) = 0$ für $j = 0, \ldots, n$, dann existiert ein $\xi \in (a, b)$ mit $f^{(n)}(\xi) = 0$. *Hinweis:* Benutzen Sie den Satz von Rolle.

- Zeigen Sie, dass jede konvexe Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ stetig ist. *Hinweise:*

  - Die Annahme, dass f konvex ist, bedeutet, dass
  $$f(x + \lambda(y - x)) \leq f(x) + \lambda(f(y) - f(x)) \tag{1}$$
  gilt für alle $x, y \in \mathbb{R}$ und jedes $\lambda \in [0, 1]$. Beweisen Sie die Ungleichung
  $$f(x) \leq \frac{1}{1+\lambda} f(x + \lambda(x - y)) + \frac{\lambda}{1+\lambda} f(y). \tag{2}$$

  - Schlussfolgern Sie aus (1), dass für jede Folge $x_n \to x$ gilt: $\limsup_{n\to\infty} f(x_n) \leq f(x)$.

  - Zeigen Sie mithilfe von (2) die Ungleichung $f(x) \leq \liminf_{n\to\infty} f(x_n)$ und schließen Sie auf $\lim_{n\to\infty} f(x_n) = f(x)$.