Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 15

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 12.02.2013)

Aufgabe 1
(i) Beweisen Sie den verallgemeinerten Mittelwertsatz: Seien $f, g\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ zwei stetige Funktionen, die auf (a,b) differenzierbar sind. Dann existiert $c \in (a,b)$, so dass $(f(b)-f(a))g'(c) = (g(b)-g(a))f'(c)$. *Hinweis:* Betrachten Sie die Funktion $h(x) = (f(b)-f(a))g(x)-(g(b)-g(a))f(x)$.
(ii) Beweisen Sie mithilfe von (i) den Satz von l'Hospital: Seien $f, g\colon (a,b) \to \mathbb{R}$, $a < b$ zwei differenzierbare Funktionen. Es gelte für ein $x_0 \in (a,b)$: $f(x_0) = g(x_0) = 0$ und $g'(x) \neq 0$ für alle $x \in (a,b) \setminus \{x_0\}$. Falls der Grenzwert $\lim_{x\to x_0}(f'(x)/g'(x))$ existiert, dann existiert auch $\lim_{x\to x_0}(f(x)/g(x))$ und die beiden Grenzwerte sind gleich.

Aufgabe 2
Berechnen Sie die folgenden Grenzwerte:
(i) $\lim_{x\to 1} \frac{x^2}{\ln x}$ und $\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x)+\exp(-x)-2}{1-\cos x}$.
(ii) $\lim_{x\to 1} \frac{x^x - x}{1-x+\ln x}$.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie, dass die Funktion $f\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 0 & \text{für } x \notin \mathbb{Q}, \\ \frac{1}{n} & \text{für } x = \frac{m}{n} \text{ mit } m, n \in \mathbb{N} \text{ teilerfremd}, n > 0 \end{cases}$$

Riemann-inegrierbar ist und berechnen Sie $\int_0^1 f(x)dx$. *Hinweis:* Benutzen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ nur endlich viele $x \in [0,1]$ existieren mit $f(x) \geq 1/n$.
(ii) Begründen Sie, dass die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ mit $g(0) = 0$ und $g(x) = 1$ für $x \neq 0$ Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass die Zusammensetzung $h = g \circ f$, wo f die Funktion aus Teil (i) ist, nicht Riemann-inegrierbar ist.

Aufgabe 4
(i) Zeigen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt und Riemann-integrierbar, dann ist die Funktion $F\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ mit $F(x) = \int_a^x f(y)dy$ Lipschitz-stetig.
(ii) Begründen Sie, dass die Funktion $f\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$f(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } 0 \leq x \leq 1, \\ 0 & \text{für } -1 \leq x < 0 \end{cases}$$

Riemann-integrierbar ist. Zeigen Sie, dass es keine differenzierbare Funktion $F\colon [-1,1] \to \mathbb{R}$ gibt, so dass $F'(x) = f(x)$ gilt für alle x. *Hinweis:* Benutzen Sie den Zwischenwertsatz für Ableitungen (Blatt 14, Aufgabe 2(ii)).

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 05.02-07.02 besprochen werden:

- *Wiederholungsaufgabe* Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Begründen Sie, dass jede stetige Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ beschränkt ist.

  Sei $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und seien $\underline{f}, \overline{f}\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ definiert durch

  $$\underline{f}(x) = \inf\{f(x') : a \leq x' \leq x\} \text{ und } \overline{f}(x) = \sup\{f(x') : a \leq x' \leq x\}.$$

  Zeigen Sie, dass $\underline{f}$ und $\overline{f}$ stetig sind.

- Sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine zweimal differenzierbare Funktion. Berechnen Sie für $x \in \mathbb{R}$ den Grenzwert

  $$\lim_{h \to 0} \frac{f(x+h) - 2f(x) + f(x-h)}{h^2}.$$

  Hinweis: Sie können den Satz von l'Hospital (Siehe Aufgabe 1 auf der Vorderseite) als bekannt voraussetzen.

- Sei $f\colon (a,b) \to \mathbb{R}$ n-mal differenzierbar, $n \geq 1$. Berechnen Sie für $x_0 \in (a,b)$ den Grenzwert $\lim_{x \to x_0} \frac{f(x)-P(x)}{(x-x_0)^n}$, wo $P(x) = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!}(x-x_0)^k$.

- Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $a < b$. Begründen Sie: Ist $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar, dann ist für jedes $c \in (a,b)$ die Einschränkung $f|_{[a,c]}$ ebenfalls Riemann-integrierbar.

  Zeigen Sie, dass jede monotone beschränkte Funktion $f\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar ist.

- Wir betrachten die Funktion $F\colon [0,\infty) \to \mathbb{R}$ mit

  $$F(x) = \begin{cases} x\sqrt{x}\sin\frac{1}{x} & \text{für } x > 0, \\ 0 & \text{für } x = 0. \end{cases}$$

  Zeigen Sie, dass F differenzierbar ist und berechnen Sie die Ableitungsfuntkion F'. Zeigen Sie, dass F' auf jedem Intervall $[0,b]$, $b > 0$ unbeschränkt und insbesondere nicht Riemann-inegrierbar ist.