Musterlösung Übungsblatt 15

Analysis I WS 2012/2013

Aufgabe 1
(i) Aus den Voraussetzungen folgt, dass $h\colon [a,b] \to \mathbb{R}$ stetig und auf (a,b) differenzierbar ist. Es gilt

$$\begin{aligned} h(a) &= (f(b)-f(a))g(a) - (g(b)-g(a))f(a) = f(b)g(a) - g(b)f(a) \\ &= (f(b)-f(a))g(b) - (g(b)-g(a))f(b) = h(b). \end{aligned}$$

Nach dem Satz von Rolle existiert ein $c \in (a,b)$ mit

$$h'(c) = (f(b)-f(a))g'(c) - (g(b)-g(a))f'(c) = 0.$$

Hieraus folgt die Behauptung.

(ii) Sei $(x_n)_{n\geq 1} \subset (a,b) \setminus \{x_0\}$ eine gegen x_0 konvergente Folge. Bezeichne mit I_n das abgeschlossene und mit I_n^o das offene Intervall zwischen x_0 und x_n, $n \geq 1$. Die Funktionen f und g sind nach Voraussetzung auf I_n stetig und auf I_n^o differenzierbar. Mit (i) folgt: Für jedes $n \geq 1$ existiert ein $c_n \in I_n^0$ mit

$$(f(x_n) - f(x_0))g'(c_n) = (g(x_n) - g(x_0))f'(c_n).$$

Wegen $g'(c_n) \neq 0$ und $f(x_0) = g(x_0) = 0$ ergibt sich

$$\frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)}.$$

Aus der Konvergenz $x_n \to x_0$ folgt $c_n \to x_0$ und damit

$$\lim_{n\to\infty} \frac{f(x_n)}{g(x_n)} = \lim_{n\to\infty} \frac{f'(c_n)}{g'(c_n)} = \lim_{x\to x_0} \frac{f'(x)}{g'(x)}.$$

Da die Folge $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ beliebig war, folgt daraus die Behauptung.

Aufgabe 2
(i)

- Betrachte $x_n = 1 + 1/n$, $n \geq 1$. Wegen Monotonie und Stetigkeit der Logarithmusfunktion gilt $\ln x_n > 0 = \lim_{n\to\infty} \ln x_n$ für jedes n. Daraus folgt $1/\ln x_n \to \infty$ und $x_n^2/\ln x_n \to \infty$ für $n \to \infty$. Analog ergibt sich für $y_n = 1 - 1/n$, $n \geq 2$: $x_n^2/\ln x_n \to -\infty$. Damit existiert $\lim_{x\to 1}(x^2/\ln x)$ weder als eigentlicher, noch als uneigentlicher Grenzwert.
- Wir betrachten $f, g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \exp(x) + \exp(-x) - 2$ und $g(x) = 1 - \cos x$. Die Vorassetzungen von 1(ii) sind erfüllt mit $x_0 = 0$ und $[a,b] = [-\pi/4, \pi/4]$, es genügt also die Existenz von
$$\lim_{x\to 0} \frac{f'(x)}{g'(x)} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\sin x}$$
nachzuweisen und diesen Grenzwert zu berechnen.

Wegen $f'(0) = g'(0) = 0$ erfüllen f' und g' auf $[-\pi/4, \pi/4]$ ebenfalls die Voraussetzngen von 1(ii) und wir berechnen:

$$\lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) - \exp(-x)}{\sin x} = \lim_{x\to 0} \frac{\exp(x) + \exp(-x)}{\cos x} = 2.$$

(ii) Wir betrachten $f(x) = x^x - x$ und $g(x) = 1 - x + \ln x$ auf einem Intervall $[a, b]$ mit $0 < a < 1 < b$. Die Voraussetzungen von 1(ii) sind erfüllt mit

$$f'(x) = (\exp(x \ln x) - x)' = (\ln x + 1)x^x - 1$$

und

$$g'(x) = -1 + \frac{1}{x}.$$

Es genügt also $\lim_{x\to 1}(f'(x)/g'(x))$ zu berechnen. f' und g' erfüllen wieder die Voraussetzungen von 1(ii), also folgt wegen $f''(x) = (1/x + (\ln x + 1)^2)x^x$ und $g''(x) = -1/x^2$:

$$\lim_{x\to 1} \frac{x^x(\ln x + 1) - 1}{-1 + \frac{1}{x}} = \lim_{x\to 1} \frac{x^x(1/x + (\ln x + 1)^2)}{-1/x^2} = -2.$$

Aufgabe 3

(i) Wir behaupten, dass f auf $[0, 1]$ Riemann-integrierbar ist mit $\int_0^1 f(x)dx = 0$. Da f ausschließlich nicht negative Werte annimmt, genügt es, für jedes $\varepsilon > 0$ eine Treppenfunktion ψ auf $[0, 1]$ zu konstruieren, so dass $f(x) \le \psi(x)$ gilt für alle $x \in [0, 1]$ und so dass $\int_0^1 \psi(x)dx < \varepsilon$.

Sei $N_1 \in \mathbb{N}$ mit $N_1 > 2/\varepsilon$ gewählt. Wir betrachten

$$X = \{\frac{m}{n} : m, n \in \mathbb{N}, 1 \le n \le N_1, 0 \le m \le n\} \subset [0, 1].$$

Es gilt:

a) Die Anzahl der Elemente von X erfüllt $|X| < \frac{(N_1+1)(N_1+2)}{2}$.

b) Für jedes $x \in [0, 1] \setminus X$ gilt $f(x) < 1/N_1$.

Sei $N_2 \in \mathbb{N}$ mit $N_2 > \frac{(N_1+1)(N_1+2)}{\varepsilon}$ gewählt und sei

$$Y = \{y_0 = 0 < y_1 < \cdots < y_M = 1\} \subset [0, 1]$$

eine endliche Teilmenge mit $X \subset Y$ und so dass $y_{j+1} - y_j < 1/N_2$ gilt für $j = 0, \ldots, M-1$. Wir definieren ψ als die Treppenfunktion, die auf jedem Intervall $[y_j, y_{j+1})$ mit $y_j \in X$ den Wert 1 und auf jedem Intervall $[y_j, y_{j+1})$ mit $y_j \in Y \setminus X$ den Wert $1/N_1$ annimmt. Wegen b) ist $f(x) \le \psi(x)$ für alle $x \in [0, 1]$ und wir behaupten, dass $\int_0^1 \psi(x)dx < \varepsilon$ gilt.

Wir berechnen unter benutzung von a) und der Wahl von X und Y:

$$\int_0^1 \psi(x)dx = \sum_{y_j \in X} (y_{j+1} - y_j) + \sum_{y_j \in Y\setminus X} \frac{1}{N_1}(y_{j+1} - y_j)$$

$$< |X|\frac{1}{N_2} + \frac{1}{N_1} < \frac{(N_1+1)(N_1+2)}{2N_2} + \frac{1}{N_2} < \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} = \varepsilon.$$

(ii) Die Funktion $g\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ ist als Treppenfunktion auf jedem Intervall $[a,b]$, $a,b \in \mathbb{R}$ Riemann-integrierbar. Die Zusammensetzung $h = g \circ f$ ist die Dirichlet-Funktion $[0,1] \to \mathbb{R}$ mit

$$h(x) = \begin{cases} 1 & \text{für } x \in [0,1] \cap \mathbb{Q}, \\ 0 & \text{für } x \in [0,1] \setminus \mathbb{Q} \end{cases}$$

und damit nicht Riemann-integrierbar (Beispiel 113(2) in der Vorlesung).

Aufgabe 4

(i) Es gelte $|f(x)| < C$ für jedes $x \in [a,b]$. Seien $x, y \in [a,b]$, $x < y$ und sei $\psi\colon [x,y] \to \mathbb{R}$ die konstante Treppenfunktion $\psi \equiv C$. Es gilt $\int_x^y \psi(z)dz = C(y-x) > 0$ und wegen $|f| \leq \psi$ folgt

$$|F(y) - F(x)| = |\int_a^y f(z)dz - \int_a^x f(z)dz| = |\int_x^y f(z)dz|$$

$$\leq \int_x^y |f(z)|dz \leq \int_x^y \psi(z)dz = C(y-x).$$

Damit ist F Lipschitz-stetig mit Lipschitz-Konstante C.

(ii) Die Funktion f ist als Treppenfunktion Riemann-integrierbar. Angenommen, $F\colon [0,1] \to \mathbb{R}$ wäre eine auf $[0,1]$ differenzierbare Funktion, so dass $F'(x) = f(x)$ gilt für jedes $x \in [0,1]$. Insbesondere ist dann $F'(-1) = f(-1) = 0 < 1 = f(1) = F'(1)$. Nach dem Zwischenwertsatz für Ableitungen (Blatt 14, Aufgabe 2(ii)) existiert ein $c \in (0,1)$ mit $F'(c) = f(c) = 1/2$. Das ist ein Widerspruch zur Tatsache, dass f nur die beiden Werte 0 und 1 annimmt.