Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Wiederholungsblatt

Analysis I WS 2012/2013

(Ohne Abgabe)

Aufgabe 1
(i) Sei $k \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie: Falls die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ konvergiert, dann ist die Folge $(\sum_{m=n}^{n+k} a_m)_{n\in\mathbb{N}}$ eine Nullfolge.
(ii) Sei $(a_n)_{n\geq 1}$ eine reelle Folge mit $|a_n - a_{n+1}| < \frac{1}{n^2}$ für alle n. Zeigen Sie, dass $(a_n)_{n\geq 1}$ eine Cauchy-Folge ist und folgern Sie, dass die Folge konvergiert.

Aufgabe 2
(i) Sei $R > 0$ und $n \in \mathbb{N}$. Zeigen Sie, dass die Funktion $f(x) = x^n$ gleichmäßig stetig ist auf $(-R, R)$.
(ii) Bestimmen Sie alle $n \in \mathbb{N}$, so dass f gleichmäßig stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$. Begründen Sie!

Aufgabe 3
(i) Seien $a \in \mathbb{R}$ und sei $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ eine stetige Funktion, die auf $\mathbb{R}\backslash\{a\}$ differenzierbar ist. Zeigen Sie: Falls der Grenzwert $\gamma = \lim_{x\searrow a} f'(x)$ existiert, dann ist f im Punkt a von rechts differenzierbar mit der rechtsseitigen Ableitung $f'_+(a) = \gamma$. *Hinweis:* Wenden Sie für jedes $x > a$ den Mittelwertsatz auf dem Intervall $[a, x]$ an.
(ii) Wir betrachten die Funktion $f\colon \mathbb{R} \to \mathbb{R}$, $f(x) = \frac{1}{|x|+1}$. Zeigen Sie, dass f in $x = 0$ rechtsseitig differenzierbar ist und berechnen Sie die rechtsseitige Ableitung $f'_+(0)$.

Aufgabe 4
Berechnen Sie die folgenden bestimmten Integrale:
(i) $\int_0^1 x \exp(x^2) dx$ und $\int_{-1}^1 \frac{1}{|x|+1} dx$.
(ii) $\int_1^2 x^n \ln x \; dx$, $n \in \mathbb{N}$. *Hinweis:* Benutzen Sie partielle Integration!

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 12.02-14.02 besprochen werden:

- Beweisen Sie, dass jede konvergente Folge eine Cauchy-Folge ist.
- Zeigen Sie, dass die Funktion $x \mapsto \exp(x)$ gleichmäßig stetig ist auf jedem Intervall $(-R, R)$, $R > 0$, aber nicht gleichmäßig stetig ist auf ganz $\mathbb{R}$.
- Formulieren Sie die Definition der links- bzw. der rechtsseitigen Ableitung einer Funktion in einem Punkt. Berechnen Sie die links- und die rechtsseitige Ableitung von $f(x) = (|x-1|+1)^2$ im Punkt $x = 1$.
- Berechnen Sie $\int_{-1/2}^{1/2} \frac{1}{x^2-1} dx$ und $\int_0^1 x \exp(-x) dx$. *Hinweis:* Benutzen Sie Partialbruchzerlegungen bzw. partielle Integration.