Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 3

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 06.11.2012)

Aufgabe 1
Wir betrachten eine Menge M zusammen mit einer Abbildung $N : M \to M$ und einem fixierten Element $e \in M$. Wir bezeichnen für $n \in M$ das Element $N(n)$ als den Nachfloger von n und $e \in M$ als das Nullelement. Überprüfen Sie in den folgenden Fällen, welche der Peano-Axiome von dem Tripel (M, N, e) erfüllt werden.
(i) $M = \mathbb{N} \sqcup \mathbb{Z}$ is die disjunkte Vereinigung der Mengen der natürlichen Zahlen und der ganzen Zahlen, N ist die Abbildung $N : k \mapsto k+1$ und $e = 0 \in \mathbb{N}$.
(ii) M ist die Menge aller rationalen Zahlen $p/q \in \mathbb{Q}$, so dass $p \geq 0$ und $q > 0$, N ist die Abbildung, welche jedem unkürzbaren Bruch p/q die Zahl $(p+1)/q$ zuordnet, und $e = 0/1$.

Aufgabe 2
Zeigen Sie, dass in jedem angeordneten Körper die folgenden Aussagen gelten.
(i) Für jedes $n \geq 1$ und alle $a_1, \ldots, a_n \geq 0$ ist

$$\prod_{k=1}^{n} (1 + a_k) \geq 1 + \sum_{k=1}^{n} a_k.$$

(ii) Für $0 < a \leq b$ gilt

$$a^2 \leq \left(\frac{2ab}{a+b}\right)^2 \leq ab \leq \left(\frac{a+b}{2}\right)^2 \leq b^2.$$

Aufgabe 3
(i) Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x mit $2|x| \leq x^2 - 3$.
(ii) Bestimmen Sie, für welche Paare (a, x) von reellen Zahlen die Äquivalenz

$$x(x - 2a^2) > 0 \Longleftrightarrow |x - a^2| > a^2$$

erfüllt ist.

Aufgabe 4
(i) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen x, y gilt: $||x| - |y|| \leq |x - y|$.
(i) Zeigen Sie, dass für alle reellen Zahlen a, b, c, d gilt: $|a - b||c - d| \leq |a - c||b - d| + |a - d||b - c|$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 30.10-01.11 besprochen werden:

- Finden Sie den Fehler im folgenden Induktionsbeweis der Aussage 'Jede endliche Teilmenge M von $\mathbb{N}$ enthält keine ungeraden Zahlen':

  Für $|M| = 0$ ist die Aussage wahr, da die leere Menge insbesondere keine ungeraden Zahlen enthält. Sei jetzt für eine $n \geq 0$ bewiesen, dass jede Teilmenge $M \subset \mathbb{N}$ mit $|M| = n$ Elementen keine ungeraden Zahlen enthält. Sei $M \subset \mathbb{N}$, $|M| = n + 1$. Da

  $$M = \bigcup_{m \in M} M \setminus \{m\}$$

  und da nach Induktionsvoraussetzung jede der n-elementigen Mengen $M \setminus \{m\}$ keine ungeraden Zahlen enthält, trifft dies auch auf M zu.

- Zeigen Sie die in der Vorlesung angegebenen, aber nicht ausführlich bewiesenen Eigenschaften von angeordneten Körpern. Zeigen Sie, dass es keine endlichen angeordneten Körper gibt.

- Zeigen Sie, dass in jedem angeordneten Körper gilt: Aus $q > 0$ folgt $q + \frac{1}{q} \geq 2$, wobei Gleichheit genau für $q = 1$ eintritt.

- Zeigen Sie, dass das Maximum $\max(x, y)$ und das Minimum $\min(x, y)$ von zwei reellen Zahlen x und y sich ausdrücken lassen als

  $$\max(x, y) = \frac{1}{2}(x + y + |x - y|) \text{ und } \min(x, y) = \frac{1}{2}(x + y - |x - y|).$$

- Bestimmen Sie alle reellen Zahlen x mit $|x - 1| \leq x^2 - x$.