Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 4

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 13.11.2012)

Aufgabe 1
(i) Sei $q \in \mathbb{Q}$. Zeigen Sie: Falls für ein $n \in \mathbb{N}$ die Zahl q^n ganzzahlig ist, dann ist q ebenfalls eine ganze Zahl.
(ii) Zeigen Sie, dass für jede natürliche Zahl $n > 0$ die Summe $\sqrt{n} + \sqrt{n+1}$ irrational ist.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie das Supremum und das Infimum der folgenden Teilmengen von $\mathbb{R}$ und entscheiden Sie, ob dieses jeweils angenommen wird:

(i) $\{1 + \frac{(-1)^n}{n} : n \in \mathbb{N}, n > 0\}$.
(ii) $\{\frac{1}{a} + (-1)^n : a \in \mathbb{R}, a > 1, n \in \mathbb{N}\}$.

Aufgabe 3
Beweisen Sie, dass für alle beschränkten nichtleeren Teilmengen $A, B \subset \mathbb{R}$ gilt:

(i) $\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$ und $\inf(A \cup B) = \min(\inf A, \inf B)$.
(ii) Falls $A \cap B \neq \emptyset$, dann ist $\max(\inf A, \inf B) \leq \inf(A \cap B) \leq \sup(A \cap B) \leq \min(\sup A, \sup B)$. Geben Sie ein Beispiel von A und B mit $\sup(A \cap B) < \min(\sup A, \sup B)$ an.

Aufgabe 4
Es sei $a_1 = 1/2$, $b_1 = 1$ und $a_{n+1} = \frac{a_n+1}{a_n+2}, b_{n+1} = \frac{b_n+1}{b_n+2}$ für $n \geq 1$.
(i) Zeigen Sie, dass für jedes $n \geq 1$ die Ungleichungen

$$a_n^2 + a_n - 1 < 0,\ a_n < a_{n+1} \text{ und } b_n^2 + b_n - 1 > 0,\ b_n > b_{n+1}$$

gelten.
(ii) Beweisen Sie, dass $a_n < b_n$ für jedes n gilt und zeigen Sie, dass $\inf\{b_n - a_n : n \geq 1\} = 0$ ist.
(iii)* (Zusatzaufgabe) Aus (i) und (ii) folgt, dass $I_n = \{x \in \mathbb{R} : a_n \leq x \leq b_n\} \subset \mathbb{R}$ eine Intervallschachtelung definiert und der Durchschnitt $\bigcap_n I_n$ genau ein Element x enthält. Zeigen Sie: x erfüllt die Gleichung $x^2 + x - 1 = 0$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 06.11-08.11 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass die Teilmenge $\{q \in \mathbb{Q} : q^2 < 2\}$ von $\mathbb{Q}$ kein Supremum (in $\mathbb{Q}$) besitzt.
- Bestimmen Sie $\sup\{2^{-n}n^2 : n \in \mathbb{N}\}$ und $\inf\{x \in \mathbb{R} : x \geq 2, 4x - x^2 < 3\}$ und entscheiden Sie jeweils, ob dieses angenommen wird.
- Sei $A \subset \mathbb{R}$ ein beschränkte Teilmenge. Es bezeichne für $r \in \mathbb{R}$
$$rA = \{ra : a \in A\}.$$
Zeigen Sie: Ist $r \geq 0$, dann ist $\sup(rA) = r \sup A$. Ist $r \leq 0$, dann ist $\sup(rA) = r \inf A$.
- Seien A und B beschränkte Teilmengen von $\mathbb{R}$ und bezeichne
$$A + B = \{a + b : A \in A, b \in B\}.$$
Zeigen Sie: $\sup(A + B) = \sup A + \sup B$.
- Geben Sie ein Beispiel einer Folge $I_1 \supset I_2 \supset \dots$ von offenen Intervallen in $\mathbb{R}$, so dass $\cap_n I_n = \emptyset$.
- Wir betrachten eine Intervallschachtelung in einem angeordneten Körper K, d. h. gegeben ist für jedes $n \geq 1$ eine Teilmenge $I_n = \{x \in K : a_n \leq x \leq b_n\} \subset K$, so dass $I_{n+1} \subset I_n$ gilt für jedes n. Zeigen Sie: Ist $\inf\{b_n - a_n : n \geq 1\} = 0$, dann enthält $\bigcap_n I_n$ höchstens ein Element (genau ein Element im Fall $K = \mathbb{R}$).