Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 5

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 20.11.2012)

Aufgabe 1
(i) Zeigen Sie, dass jede unendliche Menge eine abzählbar unendliche Teilmenge enthält.
(ii) Beweisen Sie, dass die Menge $\mathbb{N} \times \mathbb{N}$ aller Paare von natürlichen Zahlen abzählbar ist.
(iii)*(Zusatzaufgabe) Zwei Mengen heißen gleichmächtig, wenn eine bijektive Abbildung zwischen ihnen existiert. Zeigen Sie: Ist M eine beliebige Menge und $N \subset M$ eine abzählbare Teilmenge, so dass das Komplement $M \setminus N$ unendlich ist, dann sind M und $M \setminus N$ gleichmächtig. Schlussfolgern Sie, dass $\mathbb{R} \setminus \mathbb{Q}$ und $\mathbb{R}$ gleichmächtig sind.

Aufgabe 2
Stellen Sie die folgenden komplexen Zahlen in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.

(i) $\frac{3+4i}{2-i}$ und $(1+i)^n + (1-i)^n, n \in \mathbb{N}$.
(ii) ξ^n und $\sum_{k=0}^{n} \xi^k$, wo $\xi = \frac{1}{2} + \frac{\sqrt{3}}{2} i$ und $n \in \mathbb{N}$.

Aufgabe 3
(i) Zeigen Sie, dass für alle komplexen Zahlen z und w die Gleichung $|zw| = |z||w|$ und die Ungleichung $|z + w| \leq |z| + |w|$ gelten.
(ii) Zeigen Sie, dass durch

$$f : z \mapsto \frac{z-i}{z+i}$$

eine Abbildung der oberen Halbebene $\mathbb{H} = \{z \in \mathbb{C} : z = a + bi, a, b \in \mathbb{R}, b > 0\}$ auf die Kreisscheibe $D = \{z \in \mathbb{C} : |z| < 1\}$ definiert ist.

Aufgabe 4
Skizzieren Sie die unten stehend definierte Teilmenge $M \subset \mathbb{C}$. Bestimmen und skizzieren Sie weiterhin das Bild $f(M) \subset \mathbb{C}$ von M unter der jeweils angegebenen Abbildung f.

(i) $M = \{z \in \mathbb{C} : \overline{z} = iz, z \neq 0\}$ und $f : \mathbb{C} \setminus \{0\} \to \mathbb{C}, z \mapsto \frac{1}{z}$.
(ii) $M = \{z \in \mathbb{C} : z = 1 + bi, b \in \mathbb{R}\}$ und $f : \mathbb{C} \to \mathbb{C}, z \mapsto z^2$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 13.11-15.11 besprochen werden:

- Zeigen Sie, dass eine abzählbare Vereinigung endlicher Mengen abzählbar ist.
- Beweisen Sie, dass die Menge aller Tupel $(x_1, \ldots, x_n)$ mit $n \geq 1$ und $x_i \in \{\pm 1\}$ abzählbar ist, aber nicht die Menge aller Folgen $(x_k)_{k\geq 1}$ mit $x_k \in \{\pm 1\}$.
- Stellen Sie die komplexen Zahlen $\frac{1}{1+i} + \frac{1}{1-i}$ und $\left(\frac{1+i}{1-i}\right)^n$, $n \geq 1$, in der Form $a + bi$ mit $a, b \in \mathbb{R}$ dar.
- Skizzieren Sie die Mengen $M = \{z \in \mathbb{C} : 1 < Re\ z < 2\}$ und $N = \{z \in \mathbb{C} : |2z - 1| < 1\}$.
- Bestimmen und skizzieren Sie $f(M)$ und $f(N)$ für die oben angegebenen Teilmengen $M, N \subset \mathbb{C}$ und die Abbildung $f : z \mapsto \frac{1}{z}$.