Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 6

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 27.11.2012)

Aufgabe 1
Seien $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ zwei konvergente reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ und $\lim_{n\to\infty} b_n = b$.
(i) Zeigen Sie: Ist $a_n \leq b_n$ für jedes $n \geq 0$, dann gilt $a \leq b$. Geben Sie ein Beispiel für zwei Folgen, so dass $a_n < b_n$ für jedes n gilt, aber nicht $a < b$.
(ii) Sei $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ eine dritte Folge, so dass $a_n \leq c_n \leq b_n$ gilt für alle $n \geq 0$. Zeigen Sie: Ist $a = b =: c$, dann konvergiert $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ gegen c.

Aufgabe 2
Sei $\{x_n\}_{n=0}^\infty$ eine konvergente reelle Folge mit $\lim_{n\to\infty} x_n = x$.
(i) Wir betrachten für $n \in \mathbb{N}$ die Menge $X_n = \{x_k : k \geq n\} \subset \mathbb{R}$. Zeigen Sie, dass $a_n = \inf X_n$ und $b_n = \sup X_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$ existieren und dass die Folgen $\{a_n\}_{n=0}^\infty$ und $\{b_n\}_{n=0}^\infty$ gegen x konvergieren.
(ii) Zeigen Sie, dass die Folge $\{c_n\}_{n=0}^\infty$ mit $c_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=n}^{2n} x_k)$ ebenfalls gegen x konvergiert.

Aufgabe 3
Untersuchen Sie die angegebenen reellen Folgen auf Konvergenz und bestimmen Sie gegebenenfalls ihren Grenzwert. Begründen Sie das Ergebnis!
(i) $a_n = \frac{n^2+2^n}{n+3\cdot 2^n}$, $n \geq 0$.
(ii) $b_n = \frac{n^{n-2}}{n!}, n \geq 1$.

Aufgabe 4
(i) Zeigen Sie für jedes $z \in \mathbb{C}$ mit $z \neq 1$ und alle $n \in \mathbb{N}$ die Formel

$$\sum_{k=0}^{n} z^k = \frac{z^{n+1}-1}{z-1}.$$

(ii) Wir betrachten die Folge $\{w_n\}_{n=0}^\infty$ mit $w_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} z^k)$. Zeigen Sie, dass die Folge für jedes z mit $|z| \leq 1$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert. Begründen Sie!

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 20.11-22.11 besprochen werden:

- Zeigen Sie: Sind $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ und $\{b_n\}_{n=0}^{\infty}$ zwei reelle Folgen mit $\lim_{n\to\infty} a_n = a > 0$ und mit $b_n \to \infty$ für $n \to \infty$, dann ist auch $a_n b_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

- Zeigen Sie: Ist $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine konvergente reelle Folge mit Grenzwert x, dann konvergiert die Folge $\{y_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $y_n = \frac{1}{n+1}(\sum_{k=0}^{n} x_k)$ ebenfalls gegen x.

  Hinweis. Sei $|x_n - x| < C$ für alle n und $|x_n - x| < \varepsilon/2$ für alle $n \geq N(\varepsilon)$. Zeigen Sie, indem Sie $\sum_{k=0}^{n} x_k = \sum_{k=0}^{N(\varepsilon)-1} x_k + \sum_{k=N(\varepsilon)}^{n} x_k$ schreiben, dass $|y_n - x| < \varepsilon$ gilt für $n \geq \max(N(\varepsilon), \frac{2N(\varepsilon)C}{\varepsilon}))$.

- Bestimmen Sie für $a \in \mathbb{R}$ das Konvergenzverhalten der Folge $\{a_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $a_n = a^n$.

- Untersuchen Sie auf Konvergenz: $a_n = \frac{(-1)^n + n}{n^2+1}$ und $b_n = \sqrt{n+1} - \sqrt{n}$.

- Wir betrachten die komplexe Folge $\{z_n\}_{n=0}^{\infty}$ mit $z_n = i^n + \frac{1}{2^n}$. Zeigen Sie, dass die Folge divergent ist, aber jede der vier Teilfolgen $\{z_{4n+i}\}_{n=0}^{\infty}$, $i = 0, 1, 2, 3$, konvergiert.