Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 7

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 04.12.2012)

Aufgabe 1
Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge. Zeigen Sie:
(i) Konvergieren die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ gegen den selben Grenzwert, dann ist die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.
(ii) Es seien die Teilfolgen $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$, $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{3n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent. Zeigen Sie, dass die Grenzwerte von $\{a_{2n}\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{a_{2n+1}\}_{n\in\mathbb{N}}$ übereinstimmen und schlussfolgern Sie mithilfe von (i), dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergiert.

Aufgabe 2
Bestimmen Sie die Grenzwerte $\lim_{n\to\infty} x_n$ der untenstehenden Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$. Begründen Sie!
(i) $x_n = \frac{a^n - n^k}{a^n + n^k}$ mit $a \in \mathbb{R}, a > 0$ und $k \in \mathbb{Z}$.
(ii) $x_n = \frac{\sqrt{1+a_n}-1}{a_n}$, wo $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $a_n > 0$ für alle n und $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ist.

Aufgabe 3
Sei $a_0 \geq -1$ und sei $a_{n+1} = \sqrt{1 + a_n}$ für $n \geq 0$.
(i) Zeigen Sie, dass die Folge $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ monoton ist.
(ii) Zeigen Sie, dass die Folge konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 4
Seien $a, b \in \mathbb{R}$, $0 < a < b$ und sei $\{x_n\}_{n=0}^{\infty}$ eine reelle Folge mit $x_{n+2} = (a+b)x_{n+1} - abx_n$ für jedes $n \geq 0$.

(i) Beweisen Sie, dass reelle Zahlen α und β existieren, so dass für jedes $n \geq 0$ die Gleichung $x_n = \alpha a^n + \beta b^n$ erfüllt ist.
(ii) Es gelte $x_0 = x_1 = 1$ und $a < 1$. Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge in Abhängigkeit von b.
(iii)*(Zusatzaufgabe) Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge für $x_0 = x_1 = 1$ und $a \geq 1$.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 27.11-29.11 besprochen werden:

- Beweisen oder widerlegen Sie die folgende Aussage: Hat jede Teilfolge einer gegebenen Folge eine konvergente Teilfolge, dann ist die gegebene Folge konvergent.
- Beweisen Sie $\lim_{n\to\infty} \sqrt{n}(\sqrt[n]{n} - 1) = 0$ (vgl. VL Satz 28 3)).
- Berechnen Sie $\lim_{n\to\infty} x_n$ für $x_n = \sqrt[3]{n + \sqrt[3]{n^2}} - \sqrt[3]{n}$.
- Sei $a \in \mathbb{R}$, $a > 0$ und sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $x_0 > 0$ und $x_{n+1} = \frac{1}{2}(x_n + \frac{a}{x_n})$. Zeigen Sie, dass die Folge konvergiert und berechnen Sie ihren Grenzwert.
- Bestimmen Sie das Konvergenzverhalten der Folge $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $x_0 = 1$ und $x_{n+2} = x_{n+1}x_n$ für jedes $n \in \mathbb{N}$, in Abhängigkeit von x_1.