Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 8

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 11.12.2012)

Aufgabe 1
Wir betrachten die Folgen $a_n = (1+\frac{1}{n})^n$ und $b_n = (1+\frac{1}{n})^{n+1}$, $n \geq 1$.
(i) Zeigen Sie für jedes $n \geq 1$ die Formeln $\prod\limits_{k=1}^{n} a_k = \frac{(n+1)^n}{n!}$ und $\prod\limits_{k=1}^{n} b_k = \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$.
(ii) Beweisen Sie mithilfe von Teil (i) und den Hinweisen auf der Rückseite für jedes $n \geq 1$ die Ungleichungen

$$\frac{(n+1)^n}{n!} < e^n < \frac{(n+1)^{n+1}}{n!}$$

und folgern Sie die Formel $e = \lim_{n\to\infty} \frac{n}{\sqrt[n]{n!}}$.

Aufgabe 2
Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine beschränkte reelle Folge. In der Vorlesung wurde $\limsup_{n\to\infty} x_n$ als der größte Häufungspunkt der Folge definiert.
(i) Zeigen Sie die Formel $\limsup_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} b_n$, wo $b_n = \sup\{x_k : k \geq n\}$.
(ii) Berechnen Sie $\limsup_{n\to\infty} x_n$ und $\liminf_{n\to\infty} y_n$ für $x_n = (-1)^n + \frac{1}{n}$ und $y_n = \frac{(-2)^n+n^2}{n-2^n}$, $n \geq 1$.

Aufgabe 3
(i) Untersuchen Sie die Reihen $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n}{n^2}$ und $\sum_{n=2}^{\infty} \frac{2n+3}{n^3-n^2}$ und auf Konvergenz.
(ii) Berechnen Sie $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{(n+1)(n+2)(n+3)}$. *Hinweis:* Finden Sie eine explizite Formel für die Partialsummen.

Aufgabe 4
Sie $A = \sum_{n=0}^{\infty} a_n$ eine konvergente Reihe.
(i) Zeigen Sie, dass die Reihe $A(t) = \sum_{n\geq 0} t^n a_n$ für jedes $t \in (-1,1)$ konvergent ist. *Hinweis:* Benutzen Sie das Cauchy-Kriterium (VL Satz 45).
(ii) Sei jetzt $\{t_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ eine Folge mit $-1 < t_k < 1$ für alle k und mit $\lim_{k\to\infty} t_k = t$, $-1 < t < 1$. Zeigen Sie, dass $\lim_{k\to\infty} A(t_k) = A(t)$ gilt.

Zusatzaufgabe
Sei $\{n_k\}_{k\in\mathbb{N}}$ die Teilfolge der Folge der natürlichen Zahlen, die entsteht, indem man die Zahlen herausstreicht, deren Dezimaldarstellung eine neun enthält. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ konvergent ist.

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 04.12-06.12 besprochen werden:

- Wir betrachten die Folgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ und $\{b_n\}_{n\geq 1}$ aus Aufgabe 1. In der Vorlesung wurde gezeigt, dass $\{a_n\}_{n\geq 1}$ konvergiert und $e \in \mathbb{R}$ wurde als der Grenzwert dieser Folge definiert.

  Zeigen Sie, dass $\{b_n\}_{n\geq 1}$ monoton fallend und beschränkt ist. Hieraus folgt, dass $\{b_n\}_{n\geq 1}$ konvergiert. Indem Sie die Folgen $\{a_n\}_{n\geq 1}$ und $\{b_n\}_{n\geq 1}$ vergleichen, zeigen Sie: $\lim_{n\to\infty} b_n = e$.

- Sei $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine Folge positiver reeller Zahlen. Zeigen Sie: Falls die Folge keinen Häufungspunkt besitzt, dann gilt $x_n \to \infty$ für $n \to \infty$.

- Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2}$ konvergiert. *Hinweis:* Vergleichen Sie mit der geometrischen Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2^n}$.

- Berechnen Sie $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{4n^2-1}$. *Hinweis:* Benutzen Sie eine Partialbruchzerlegung, um die Formel $\sum_{k=1}^{n} \frac{1}{4k^2-1} = \frac{1}{2}(1 - \frac{1}{2n+1})$ zu finden.

- Zeigen Sie mithilfe des Cauchy-Kriteriums: Ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine reelle Folge mit $|x_n - x_{n+1}| \leq 2^{-n}$ für alle n, dann ist $\{x_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ konvergent.