Prof. Klaus Mohnke
Institut für Mathematik
Rudower Chaussee 25
Haus 1 Raum 306

Übungsblatt 9

Analysis I WS 2012/2013

(Abgabe: 18.12.2012)

Aufgabe 1

(i) Untersuchen Sie die folgenden Reihen auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(n+1)^{n-1}}{(-n)^n}$ und $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2^n n!}{n^n}$.

(ii) Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n(n+1)}{2} x^n$ und berechnen Sie im Konvergenzfall ihren Grenzwert.

Aufgabe 2

Sei $1 = n_0 < n_1 < n_2 < \dots$ die Folge aller positiver natürlicher Zahlen, die keine anderen Primfaktoren außer 2 und 3 haben.

(i) Geben Sie die ersten zehn Folgenglieder $\frac{1}{n_k}$ der Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ an sowie die ersten zehn Folgenglieder einer Reihe, die zum Cauchy-Produkt von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^{-n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} 3^{-n}$ führt.

(ii) Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{n_k}$ konvergent ist und berechnen Sie ihren Grenzwert.

Aufgabe 3

Eine Folge $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ von komplexen Zahlen heißt summierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|$ konvergent ist und quadratsummierbar, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} |z_n|^2$ konvergiert. Seien $\{z_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ und $\{w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ zwei quadratsummierbare Folgen. Zeigen Sie:

(i) Die Folge $\{z_n w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist summierbar.

(ii) Die Folge $\{z_n + w_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ist quadratsummierbar.

Aufgabe 4

Wir betrachten die Fibonacci-Folge $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ mit $f_0 = f_1 = 1$ und $f_{n+2} = f_{n+1} + f_n$ für alle $n \geq 0$.

(i) Bezeichne mit $x = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ die positive Lösung der Gleichung $x^2 - x - 1 = 0$. Zeigen Sie für jedes $n \geq 0$ die Formel $|\frac{f_{n+1}}{f_n} - x| = \frac{1}{x^{n+1} f_n}$.

(ii) Folgern Sie aus (i), dass die Reihe $f(t) = \sum_{n=0}^{\infty} f_n t^n$ für $|t| < 1/x$ konvergiert und beweisen Sie die Gleichung $f(t) = \frac{1}{1-t-t^2}$.

(iii)*(Zusatzaufgabe) Indem Sie die Identität $\frac{1}{1-t-t^2} = \frac{1}{\sqrt{5}}(\frac{1}{x-1-t} + \frac{1}{x+t})$ benutzen, folgern Sie aus (ii) die Formel

$$f_n = \frac{1}{\sqrt{5}}(x^{n+1} - (1-x)^{n+1}).$$

Bitte wenden...

Folgende Beispielaufgaben können in den Übungen vom 11.12-13.12 besprochen werden:

- Untersuchen Sie auf Konvergenz: $\sum_{n=1}^{\infty} \sqrt{1-\frac{1}{n}}$, $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{n!}{n^n}$ und $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2n+1} x^{2n+1}, x \in \mathbb{R}$.
- Bestimmen Sie den Konvergenzradius der Potenzreihe $\sum_{n=1}^{\infty} n^q x^n$ mit $q \in \mathbb{Q}$.
- Seien $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine positive und $\{b_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine konvergente Folge. Zeigen Sie: Falls die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ konvergent ist, dann ist auch die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n b_n$ konvergent.

  Zeigen Sie durch die Angabe eines Beispiels, dass die Voraussetzung, dass $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ positiv ist, notwendig ist.
- Sei $\{a_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ eine monoton fallende positive Folge. Zeigen Sie, dass die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ genau dann konvergent ist, wenn die Reihe $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ konvergiert.

  Hinweis: Fassen Sie die Summanden von $\sum_{n=0}^{\infty} 2^n a_{2^n}$ auf geeignete Weise zusammen und benutzen Sie dann die Monotonie der Folge, um diese Reihe nach oben und nach unten abzuschätzen.
- Zeigen Sie den folgenden *Identitätssatz*: Sind $A(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ und $B(t) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$ zwei Potenzreihen mit positiven Konvergenzradien und existiert ein $\varepsilon > 0$, so dass $A(t) = B(t)$ gilt für $|t| < \varepsilon$, dann ist $a_n = b_n$ für jedes $n \geq 0$.

  Hinweis: Zeigen Sie zunächst: Ist $C(t) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n t^n$ eine Reihe mit Konvergenzradius $r > \varepsilon > 0$ und mit $c_0 \neq 0$, dann existiert ein $t_0 \in (-\varepsilon, \varepsilon)$ mit $t_0 \neq 0$ und $C(t_0) \neq 0$. Wenden Sie dies auf die Differenz $C(t) = A(t) - B(t)$ an.